



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

**La enseñanza del concepto de paralelismo y perpendicularidad
mediante la implementación de un proyecto de aula**

**The teaching of the concept of parallelism and perpendicularity
through the implementation of a classroom Project.**

María Cristina Carmona Correa

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Medellín, Colombia
2020

La enseñanza del concepto de paralelismo y perpendicularidad mediante la implementación de un proyecto de aula

María Cristina Carmona Correa

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título **de:**
Magíster en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director(a):

Magíster en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Fabio Alexander Cortés Garcés

Trabajo en profundización
Estudio de casos

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Medellín, Colombia
2020

En memoria de mi padre porque

Siempre creyó en mí.

Agradecimientos

Agradezco a mi esposo y a mi hija porque siempre me impulsaron a seguir adelante.

Resumen

El presente trabajo aborda los conceptos matemáticos de paralelismo y perpendicularidad mediante la construcción de un proyecto de aula enmarcado en los niveles de comprensión planteados por Pirie y Kieren (1994) Este modelo de comprensión permite ubicar los estudiantes en uno de los niveles, a partir del análisis de las respuestas de los estudiantes; el proceso de análisis se realiza de manera cualitativa teniendo en cuenta algunos factores que inciden en los estudiantes, por ejemplo, el contexto que los rodea. Para el análisis cualitativo de los procesos de comprensión del trabajo realizado por los estudiantes se tiene presente los descriptores planteados para cada uno de los niveles, usando el método de investigación de estudio de casos; para este estudio se escogen 3 casos, los cuales se analizan de manera minuciosa concluyendo que, el caso 1 alcanza el nivel 2 de comprensión, el caso 2 alcanza el nivel 3 de comprensión y el caso 3 alcanza el nivel 4 de comprensión, ninguno de los casos logra definir de manera formal los conceptos de paralelismo y perpendicularidad. Pero, el caso 2 y 3 si logran identificarlo desde un lenguaje cotidiano.

Palabras clave:

Paralelismo, perpendicularidad, ángulos, rectas, proyecto de aula, niveles de comprensión.

Abstract

The present work addresses the mathematical concepts of parallelism and perpendicularity through the construction of a classroom project framed in the levels of understanding proposed by Pirie and Kieren. This understanding model allows students to be placed in one of the levels based on the analysis of the students' responses; the analysis process is carried out qualitatively, taking into account some factors that affect students, for example, the context that surrounds them. For the qualitative analysis of the processes of understanding of the work carried out by the students, the descriptors proposed for each of the levels are kept in mind using the case study research method; For this study, 3 cases are chosen, which are carefully analyzed, concluding that case 1 reaches level 2 of understanding, case 2 reaches level 3 of understanding and case 3 reaches level 4 of understanding, none of them Cases manages to formally define the concepts of parallelism and perpendicularity, but case 2 and 3 do manage to identify it from an everyday language.

Keywords:

Parallelism, perpendicularity, angles, lines, classroom project, levels of understanding.

Tabla de contenido

Resumen.....	5
Tabla de contenido	7
Introducción	13
Capítulo 1	15
1. Diseño teórico	15
1.1. Selección y delimitación del tema	15
1.2. Planteamiento del problema.....	15
1.2.1. Descripción del problema.....	15
1.2.2. Formulación de la pregunta.....	19
1.3. Justificación	19
1.4. Objetivo general.....	19
1.5. Objetivos específicos	19
Capítulo 2.....	21
2. Marco referencial.....	21
2.1. Referente Antecedentes	21
2.1.1. Antecedentes de proyecto de aula	21
2.1.2. Antecedentes de paralelismo y perpendicularidad	22

2.1.3. Antecedentes de Pirie y Kieren	23
2.2. Referente teórico	23
2.2.1. Proyecto de aula	23
2.2.2. La teoría de Pirie y Kieren	25
2.3. Referente conceptual – disciplinar	28
Momento 2: metodología	29
Momento 3: Evaluación	29
2.4. Referente legal	30
2.5. Referente espacial	31
Capítulo 3.....	33
3. Diseño metodológico	33
3.1. Enfoque	33
3.2. Método	34
3.3. Instrumentos de recolección de información y análisis de información.....	35
3.4. Población y muestra	36
3.5. Delimitación y alcance.....	36
Actividad diagnóstica.....	37
Situación problema	44
3.6. Explicación de las preguntas de la guía de intervención	50
3.7. Descriptores	53

Capítulo 4.....	55
4. Análisis de los resultados	55
4.1. Estudio de casos	55
4.1.1. Criterios para escoger los casos:	56
4.2. Caso 1. C1:.....	56
4.3. Caso 2. C2:.....	62
4.4. Caso 3. C3:.....	67
Capítulo 5.....	73
5. Conclusiones.....	73
5.1. Consecución de los objetivos.....	73
5.2 Proyectos hacia futuro.....	75
5.3 Cronograma.....	76
Bibliografía	80

Lista de ilustraciones

Ilustración 1: Tomado de resultados pruebas saber 2017. https://diae.mineducacion.gov.co/siempre_diae/documentos/2017/Institucion_Educativa/105088000419.pdf	16
Ilustración 2: Descripción del problema.	18
Ilustración 3: Derechos básicos en paralelismo y perpendicularidad.	30
Ilustración 4: Diseño metodológico	35
Ilustración 5: Calle Rue Cremieux, París. Tomado de: https://www.lanacion.com.ar/sociedad/rue-cremieux-la-calle-de-paris-que-se-harto-de-los-instagramers-que-buscan-la-f-nid2226655 . Crédito de: Instagram.com/cindytopics/	39
Ilustración 6: Tomado de: https://es.aliexpress.com/item/32614730186.html	39
Ilustración 7: Respuesta de C1 a la pregunta 1	56
Ilustración 8: Respuesta de C1 a la pregunta 2	57
Ilustración 9: Respuesta de C1 a la pregunta 3	57
Ilustración 10: Respuesta de C1 a la pregunta 4	58
Ilustración 11: Respuesta de C1 a la pregunta 5	58
Ilustración 12: Respuesta de C1 a la pregunta 6	59
Ilustración 13: Respuesta de C1 a la pregunta 7	59
Ilustración 14: Respuesta de C1 a la pregunta 8	59
Ilustración 15: Respuesta de C1 a la pregunta 9	60
Ilustración 16: Respuesta de C1 a la pregunta 10	60

Ilustración 17: Respuesta de C1 a la pregunta 11	61
Ilustración 18: Respuesta de C1 a la pregunta 12.	61
Ilustración 19: Respuesta de C2 a la pregunta 1.	62
Ilustración 20: Respuesta de C2 a la pregunta 2.	62
Ilustración 21: Respuesta de C2 a la pregunta 3	62
Ilustración 22: Respuesta de C2 a la pregunta 4	63
Ilustración 23: Respuesta de C2 a la pregunta 5	63
Ilustración 24: Respuesta de C2 a la pregunta 6.	64
Ilustración 25: Respuesta de C2 a la pregunta 7	64
Ilustración 26: Respuesta de C2 a la pregunta 8	65
Ilustración 27: Respuesta de C2 a la pregunta 9.	65
Ilustración 28: Respuesta de C2 a la pregunta 10.	66
Ilustración 29: Respuesta de C2 a la pregunta 11.	66
Ilustración 30: Respuesta de C2 a la pregunta 12.	66
Ilustración 31: Respuesta de C3 a la pregunta 1.	67
Ilustración 32: Respuesta de C3 a la pregunta 2.	67
Ilustración 33: Respuesta de C3 a la pregunta 3	68
Ilustración 34: Respuesta de C3 a la pregunta 4.	68
Ilustración 35: Respuesta de C3 a la pregunta 5.	69
Ilustración 36: Respuesta de C3 a la pregunta 6.	69
Ilustración 37: Respuesta de C3 a la pregunta 7.	69
Ilustración 38: Respuesta de C3 a la pregunta 8.	70
Ilustración 39: Respuesta de C3 a la pregunta 9.	70

Ilustración 40: Respuesta de C3 a la pregunta 10. 71

Ilustración 41: Respuesta de C3 a la pregunta 11. 71

Ilustración 42: Respuesta de C3 a la pregunta 12. 71

Introducción

Esta propuesta pedagógica pretende hacer una descripción de los procesos de comprensión de los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa la Gabriela, en los conceptos matemáticos de paralelismo y perpendicularidad, para este proceso se parte de los conocimientos previos de los estudiantes, como: ángulos, clasificación de los ángulos, medida de los ángulos, rectas, posición entre dos o más rectas, segmentos. Este análisis se realizó mediante la aplicación de un proyecto de aula, teniendo como referencia la propuesta de González , (2001), la cual propone tres momentos: momento 1 contextualización, momento 2 método y el momento 3 la evaluación.

En la contextualización se ubica la población, el problema y se definen los objetivos, en lo metodológico se define la forma como se va a intervenir la población para identificar el grado de comprensión que tienen los estudiantes de los conceptos de paralelismo y perpendicularidad. Para ello, se construye una situación problema basada en la estructura del colegio la Gabriela, donde se crean unos personajes, Paramelio y Perpendio los cuales recorren la Institución de una manera particular. Los bloques de preguntas en la situación problema están direccionadas a diferentes tipos de razonamiento donde el estudiante puede responder usando un gráfico o dando una definición formal o usando un lenguaje cotidiano, esto permitire al docente ubicar el estudiante en uno de los niveles de comprensión propuestos por Pirie y Kieren (1994).

El último momento de evaluación se realiza a partir del análisis de las preguntas mediante el uso de los descriptores planteados para cada uno de los niveles de comprensión presentados por Pirie y Kieren (1994), los niveles son: Nivel 1. Conocimiento primitivo, conocimientos previos, nivel 2: Creación de imagen, nivel 3: Comprensión de la imagen, nivel 4: Observación de la propiedad, nivel 5: Formalización, nivel 6: Observación, nivel 7: Estructuración y nivel 8:

Invención. Por lo tanto, el concepto matemático con el cual se pretende realizar un estudio del grado de comprensión de los estudiantes de grado 5 es el de paralelismo y perpendicularidad.

En el proceso del rastreo bibliográfico se logró encontrar como algunos autores han estudiado los conceptos de paralelismo y perpendicularidad por separado, lo cual permite que este trabajo sea pertinente para analizar los procesos de comprensión de los estudiantes mediante la creación de un proyecto de aula, enmarcado en los niveles de comprensión de Pirie y Kieren.

Para facilitar el análisis de las respuestas de los estudiantes y poder ubicarlos en uno de los niveles de comprensión propuestos por Pirie y Kieren, este trabajo toma un enfoque cualitativo ya que este permite analizar las respuestas de los estudiantes teniendo en cuenta algunos factores que influyen en ellos a la hora de comprender los conceptos de paralelismo y perpendicularidad. De ahí que, sea pertinente usar el método de investigación propuesto por Stake (1999), el estudio de casos.

Capítulo 1

1. Diseño teórico

1.1. Selección y delimitación del tema

En la propuesta se trabajará un concepto matemático el cual estará basado en un proyecto de aula, aplicado a la enseñanza del concepto de paralelismo y perpendicularidad, analizado desde la clasificación de los ángulos y la relación entre dos o más rectas.

1.2. Planteamiento del problema

1.2.1. Descripción del problema

Contextualización socioeconómica y cultural de la Institución.

El barrio la Gabriela está ubicada en la zona sur – oriental del municipio de Bello (Antioquia).

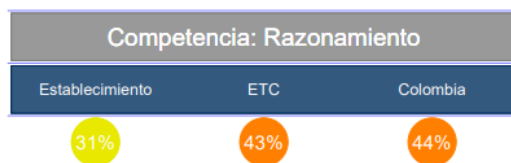
Generalmente las familias son numerosas, en donde hay muchos niños y jóvenes. Gran parte de los oficios que desempeñan las personas que sostienen las familias, están dedicadas al comercio informal; obreros de construcción y empleadas domésticas. Hay muchos casos de madresolterismo.

En el barrio la Gabriela, se ha presentado un alto índice de violencia social en jóvenes y adultos; el Estado ha tratado de mitigar dichas acciones con diferentes intervenciones. Hacen falta más líderes sociales que encaminen a la comunidad en la consecución de actividades culturales y deportivas lo que impactará positivamente la población del barrio.

Diseño Teórico

Analizando el desempeño de los estudiantes en las pruebas externas aplicadas por el ICFES en el año 2017, se encuentra que en el área de matemáticas existen buenos resultados en el pensamiento numérico; pero en el pensamiento geométrico el 47% no reconoce las nociones de paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos, ni las usa para construir y clasificar figuras planas y sólidos.

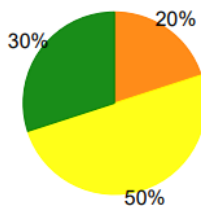
1. Descripción general de la competencia.



Interpretación

El 31% de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas de esta competencia.

2. Descripción general de los aprendizajes.



*Los porcentajes son números redondeados. En algunos casos pueden sumar 99% o 101%.

Interpretación

De los aprendizajes evaluados en esta competencia, su establecimiento educativo tiene el 0% de aprendizajes en rojo, el 20% en naranja, el 50% en amarillo y el 30% en verde.

3. Aprendizajes.

A continuación encontrará el listado de aprendizajes. Ponga especial énfasis en los que están en rojo y naranja para implementar acciones pedagógicas de mejoramiento y siga fortaleciendo los que están en amarillo y verde.

Interpretación

El 52% de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas correspondientes al primer aprendizaje. Esta interpretación aplica de igual manera para los demás aprendizajes.

El 52% no analiza relaciones de dependencia en diferentes situaciones.

El 47% no reconoce nociones de paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos ni las usa para construir y clasificar figuras planas y sólidos.

Ilustración 1: Resultados ICFES Pruebas Saber grado 5° 2017

Fuente: MEN (2017, p. 12).

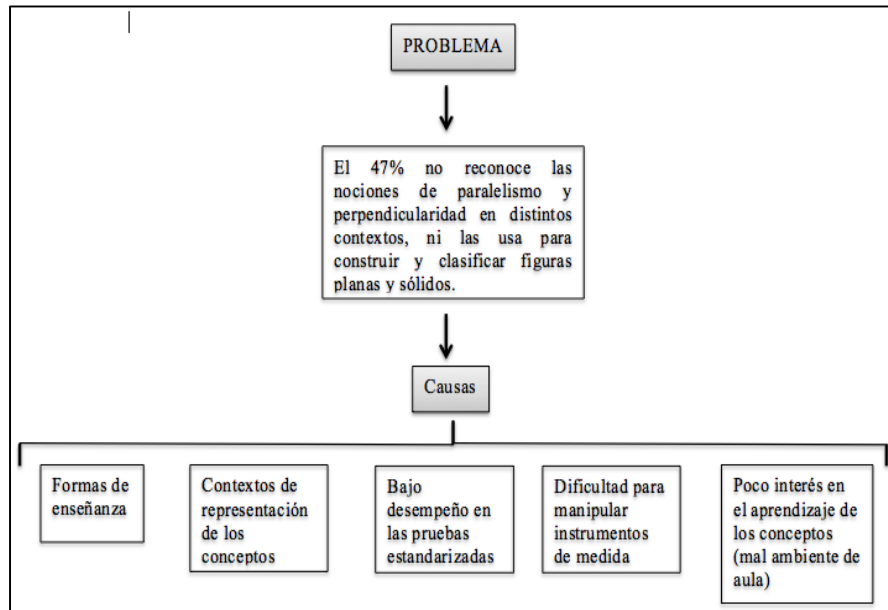
Diseño Teórico

Dicho problema se agudiza con la percepción que tienen los estudiantes hacia la academia.

En una encuesta que se realizó a los estudiantes con bajo rendimiento académico, esta arrojó las siguientes respuestas:

- El acompañamiento familiar con el que cuentan es muy deficiente (acompañamiento asertivo de tareas).
- No cuentan con hábitos de estudio.
- Les faltan los materiales para participar de las clases (instrumentos de medida).
- Malos ambientes de aula (indisciplina).
- Las formas de enseñanza de los maestros.
- El tiempo libre que tienen lo invierten en redes sociales.
- El tiempo de preparación de un examen es máximo de un día.
- Consultan en páginas de internet para repasar o aclarar las dudas.
- Duermen pocas horas.
- Resuelven las dudas que les quedan con sus compañeros de clase y no con los docentes.

Diseño Teórico

*Ilustración 2: Descripción del problema.*

Ahora bien, como se ha encontrado una dificultad en los procesos de razonamiento de los estudiantes en geometría, según (Duval, 2006) plantea la necesidad de hacer hincapié en la habilidad para cambiar de registro de representación; es decir, el manejo de la forma discursiva y el manejo a través de la reorganización de formas.

Teniendo presente el tema de estudio, el cual está enfocado en el pensamiento espacial y sistemas geométricos planteados por los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN,1998) donde se menciona como: “Howard Gardner en su teoría de inteligencias múltiples; considera como una de estas inteligencias, la espacial, para representar y manipular la información. Además, la propuesta de Renovación Curricular dice que la geometría activa es una alternativa para restablecer el estudio de sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio. Desde la geometría activa se propone que el estudiante en medio de los procesos de análisis de las propiedades de los conceptos geométricos haga cosas como:

Diseño Teórico

moverse, dibujar, construir, producir y tomar los esquemas operatorios en el material para la conceptualización o representación interna.” (p. 37).

1.2.2. Formulación de la pregunta

¿Cómo mejorar los procesos de comprensión del concepto de paralelismo y perpendicularidad enmarcado en los niveles de comprensión de Pirie y Kieren, aplicado en la Institución Educativa La Gabriela en el grado 5?

1.3. Justificación

Para mejorar los procesos de comprensión en geometría en los estudiantes de la Institución Educativa la Gabriela de grado 5, se propone la implementación de un proyecto de aula, según (González , 2001): donde se define como una propuesta didáctica basada en la solución de problemas, teniendo en cuenta los procesos formativos conceptualizados en la academia. Por lo tanto, uno de los objetivos que se proponen en dicho proyecto es la aprehensión del objeto de estudio a través de una orientación clara del docente hacia los estudiantes.

1.4. Objetivo general

Diseñar un proyecto de aula que permita la comprensión del concepto de paralelismo y perpendicularidad en estudiantes de grado 5° de la Institución Educativa La Gabriela.

1.5. Objetivos específicos

- Identificar las dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión de los conceptos de paralelismo y perpendicularidad, mediante la aplicación de una actividad diagnóstica.

Diseño Teórico

- Diseñar las actividades del proyecto de aula a partir de los procesos generales en matemáticas que permitan la comprensión del concepto de paralelismo y perpendicularidad en los estudiantes de grado 5.
- Intervenir mediante el proyecto de aula para verificar cuáles son los procesos de razonamiento en la comprensión del concepto de paralelismo y perpendicularidad de los estudiantes de grado 5.
- Validar el impacto del proceso de comprensión en los estudiantes del concepto de paralelismo y perpendicularidad, a partir del análisis de la clasificación de los ángulos y la relación entre dos o más rectas; ubicándolos en uno de los niveles de Piere y Kieren.

Capítulo 2

2. Marco referencial

2.1. Referente Antecedentes

Mediante la consulta de varias bases de datos se hace el rastreo bibliográfico acerca de los estudios realizados de los conceptos matemáticos de paralelismo y perpendicularidad enmarcados en un proyecto de aula, se hallan los siguientes documentos.

2.1.1. Antecedentes de proyecto de aula

Diseño de un proyecto de aula que contribuya al fortalecimiento de la enseñanza de la matemática en la básica primaria

El trabajo propone implementar nuevas estrategias de enseñanza en matemáticas, puesto que en el estudio se pudo evidenciar grandes falencias conceptuales en los docentes de primaria de la Institución. (Corrales, 2015)

El proyecto de aula como movilizador de la interculturalidad en los estudiantes del grado cuarto de la IE San Benito

El autor se enfoca en mostrar la importancia del respeto hacia otras culturas, mediante la implementación de un proyecto de aula. Este proyecto se desarrolló teniendo en cuenta la diversidad cultural en Colombia donde este fuera protagonista y nos permitiera traer al aula otras formas de pensar, vivir, ser y saber, para crear un diálogo en el cual se permitiera de manera

Marco referencial

respetuosa, crítica y reflexiva comprender que somos diferentes pero de igual valor y por esto es posible vivir con libertad la identidad. (Escobar, 2019)

2.1.2. Antecedentes de paralelismo y perpendicularidad

Las representaciones semióticas en la comprensión de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad

La autora propone la indagación de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad desde la representación que hacen los estudiantes de los objetos en la geometría escolar.

Basándose en autores como Duval y Fischbein. (Monsalve, 2009)

Estudio del paralelismo entre las fases de resolución de un juego y las fases de resolución de un problema

El autor propone una situación problema en la cual el estudiante debe buscar una estrategia matemática para dar solución a la situación. Busca aplicar el concepto de paralelismo como estrategia para ganar la mayor cantidad de veces en el juego “cerrar quince”. Este juego consiste en construir un cuadrado de lado 3 y dividirlo en 9 cuadrados, se le entrega a cada uno de los jugadores 9 cartas numeradas del 1 al 9, luego, cada jugador debe ubicar 3 cartas que sumen 15 de manera vertical u horizontal. Para que un estudiante logre ganar debe aplicar de manera intuitiva el concepto de paralelismo para ubicar las cartas de manera estratégica. (Edo Basté , Deulofeu Piquet, Badillo Jiménez, & Baeza Toro, 2008)

Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

El autor muestra la importancia de la historia de los conceptos en la enseñanza matemática y la relación de la cultura en la aplicación de un concepto matemático en la solución de

Marco referencial

problemas. Se propone analizar las diferentes estructuras de las viviendas, observando las figuras geométricas de cada una de ellas, y como el diseño de las viviendas ha cambiado a través de la historia. (Cotera, 2020)

2.1.3. Antecedentes de Pirie y Kieren

La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren

El autor toma la teoría de Pirie y Kieren para mostrar las ventajas de dicha teoría con respecto a las experiencias de enseñanza y aprendizaje y cómo evoluciona la comprensión de los estudiantes en diferentes conceptos matemáticos. (Londoño Cano, 2011)

2.2. Referente teórico

2.2.1. Proyecto de aula

La propuesta del presente trabajo, se sustenta a partir de la construcción de un proyecto de aula que ayude a la comprensión del concepto de paralelismo y perpendicularidad en los estudiantes de grado 5. Se define el proyecto de aula como una propuesta didáctica fundamentada en la solución de problemas (González, 2001).

Proponer a los estudiantes un proyecto de aula basado en la solución de problemas implica indagar acerca de la concepción que se tiene en educación sobre lo que es un problema, de ahí que, se entienda como una dificultad que no puede resolverse automáticamente. (Bunge, 1972). Esto hace que los estudiantes a la hora de resolver un problema, acudan a los conocimientos previos y traten de abordar el concepto matemático de manera intuitiva, esto da explicación a lo que se entiende por una situación problema cuando esta se integra al proyecto de aula.

Marco referencial

Una situación problema permite que los estudiantes construyan el concepto matemático a partir de la indagación de las posibles soluciones o caminos que pueden permitir la comprensión del objeto de estudio, entonces, la situación problema se puede entender como un espacio en el cual los estudiantes pueden interactuar en torno al objeto de estudio generando procesos de comprensión hacia la construcción de un conocimiento. (Obando y Múnera , 2003).

Teniendo en cuenta la fundamentación de un proyecto de aula a partir de la solución de una situación problema, se puede identificar tres momentos importantes:

- Contextualización.
- Metodología.
- La evaluación.

Momento 1: Contextualización

Es el momento donde se plantea el problema y se traza el objetivo. El problema debe ser acorde al contexto de los estudiantes donde se debe precisar las características propias de éste, teniendo claro que el objetivo debe ser claro y conciso.

Momento 2: Metodología

Se proponen las actividades donde se hace una descripción clara del objeto de estudio; cada una de estas actividades está diseñada para que los estudiantes tengan la información necesaria para tener los procesos de razonamiento que lo lleven a la comprensión del concepto matemático.

Estas actividades deben estar acordes a los objetivos trazados en el proyecto de aula, los conocimientos previos de los estudiantes y las estrategias que estos pueden implementar en la solución del problema.

Marco referencial

Momento 3: La evaluación

La evaluación en el proyecto de aula se propone desde la observación por parte del docente hacia el trabajo conceptual que hacen los estudiantes frente a la solución de problemas que tienen que ver con el objeto de estudio, estos procesos son analizados a partir de los objetivos planteados, tendiendo presente algunas regularidades que se presentan en las respuestas de los estudiantes y verificar que tan efectiva fue la propuesta en la comprensión del concepto matemático.

Ahora bien, para que los estudiantes logren alcanzar la comprensión de los conceptos matemáticos a través de un proyecto de aula implementando una situación problema, se tiene en cuenta los niveles de comprensión propuestos por Pirie y Kieren, en los cuales se puede ubicar los estudiantes en uno de los niveles según el grado de comprensión del objeto de estudio. La comprensión es un concepto bastante amplio de ahí que se pueda concebir de diferentes formas, en el presente trabajo se entenderá la comprensión como un proceso continuo para organizar las estructuras del conocimiento de una persona, Glasersfeld, (1987). Definición que aborda la teoría de Pirie y Kieren.

2.2.2. La teoría de Pirie y Kieren

Esta teoría está conformada por ocho niveles, los cuales hacen una descripción de los saberes matemáticos de los estudiantes, estos niveles muestran los avances conceptuales que tiene el entrevistado a la hora de razonar sobre los diferentes conceptos matemáticos.

No obstante, una de las razones por las cuales se va a utilizar esta teoría en la investigación es por sus características, ya que permite hacer un análisis sustancial del papel de la intuición en la comprensión matemática. Esta teoría cumple con tres características principales:

- Folding back.

Marco referencial

- Límites de falta de necesidad.
- Los acting and expressing complements (complementariedades de la acción y la expresión).

El folding back, tiene que ver con el redoblamiento, los autores lo definen como: “El redoblamiento permite a una persona devolverse de un nivel superior a un nivel inferior, de tal forma que, pueda reconstruir el concepto y usarlo como base para un nivel de comprensión superior.” (Pirie & Kieren,). folding back: Dynamics in the growth of mathematical understanding. Fifteenth Meeting of the Psychology of Mathematics Education Conference. Assisi,, 1991b).

Se entiende que los límites de falta de necesidad se pueden ver cuando los estudiantes no necesitan de los conocimientos adquiridos en los niveles inferiores puesto que han tenido un avance significativo en la comprensión del concepto matemático. (Pirie y Kieren, 1992b).

Los acting and expressing complements (complementariedades de la acción y la expresión) en su teoría Pirie y Kieren, afirman (traducción libre) que: “El último rasgo de la teoría que aquí, queremos mencionar, es la de la estructura dentro de los mismos niveles”(1994). Los autores muestran la importancia de la comprensión del concepto matemático planteado a través de cada uno de los niveles propuestos por Pirie y Kieren, la evolución de la aprehensión por parte de los estudiantes se da mediante la complementariedad de un nivel con otro, de ahí que sea necesario pasar por los niveles inferiores en ese orden riguroso a los niveles superiores.

Nomenclatura de los niveles

La nomenclatura para los niveles propuestos por Pirie y Kieren se nombrarán teniendo como referencia a Meel (2003):

Marco referencial

- **Nivel 1. Conocimiento primitivo, conocimientos previos.** Los estudiantes usan los conocimientos previos que son la información que han aprendido mediante la experiencia y que están relacionados con los conceptos matemáticos tratados en el proyecto de aula. También en términos de Brown, Collins y Duguid (1989) se conoce como conocimiento situado o en términos de Saxe (1988) conocimiento previo o informal.
- **Nivel 2. Creación de imagen.** Los estudiantes crean una imagen mental o idea general del objeto de estudio.
- **Nivel 3. Comprensión de la imagen.** En este nivel los estudiantes reemplazan las imágenes mentales creadas para entender el concepto y empiezan a reconocer las propiedades básicas de las imágenes matemáticas antes analizadas.
- **Nivel 4. Observación de la propiedad.** Se pretende que el estudiante logre analizar una de las imágenes mentales y reconozca las propiedades intrínsecas de esta y las diferentes aplicaciones del concepto, es decir las conexiones que pueda tener esta imagen con las demás, tratando de dar una definición a partir de las propiedades. Es posible igualmente que desarrolle un concepto-definición (Tall y Vinner, 1981) creado a partir de la interacción entre las imágenes creadas por los estudiantes, en vez de las imágenes desvinculadas.
- **Nivel 5. Formalización.** Se pretende que los estudiantes identifiquen las propiedades comunes de los diferentes tipos de imágenes, logran dar una definición matemática y la descripción que realizan es coherente con la definición formal del concepto, aunque ellos no usen este lenguaje.
- **Nivel 6. Observación.** Se pretende que el estudiante logre formalizar el concepto matemático sea de forma verbal o mediante el uso de un lenguaje más estructurado. Logra identificar teoremas y demostraciones mediante el uso de ejemplos.

Marco referencial

- **Nivel 7. Estructuración.** Se pretende que el estudiante entienda el tema particular para la comprensión que se encuentra en un nivel superior, donde explica las relaciones del concepto matemático mediante un sistema axiomático (Pirie y Kieren,1989).
- **Nivel 8. Invención.** Se pretende que el estudiante sea capaz de trascender en el conocimiento, es decir, pasar de dar una definición formal del concepto a crear preguntas que tengan como resultado la creación de un concepto nuevo. Según Londoño (2011), este conocimiento que quizá no tenga una estructura formal pasa a ser un conocimiento primitivo por lo cual volvería al nivel 1 del proceso de razonamiento de Pirie y Kieren.

2.3. Referente conceptual – disciplinar

En este proyecto de aula se conceptualizará sobre los objetos matemáticos de perpendicularidad y paralelismo en estudiantes de grado 5, concepto de paralelismo y perpendicularidad a partir del análisis de la clasificación de los ángulos y la relación entre dos o más rectas. Para esto, se crearon unos descriptores los cuales deben alcanzar los estudiantes según el nivel de razonamiento aplicado a la teoría de Pirie y Kieren. Para cada nivel de la teoría se darán los descriptores adecuados, iniciando desde el nivel 1 conocimiento primitivo hasta el nivel 8 invención.

El proyecto de aula se va a dividir en tres momentos:

Momento 1: conceptualización

Momento 2: metodología

Momento 3: evaluación

Marco referencial

En el momento 1, se proponen las actividades para que el estudiante mediante el análisis de la clasificación de los ángulos y la relación entre dos o más rectas, pueda comprender los conceptos de paralelismo y perpendicularidad entre dos o más rectas.

La comprensión de estos conceptos será de manera guiada por el docente, teniendo en cuenta los descriptores planteados para cada nivel de comprensión propuesto por Pirie y Kieren.

Algunas de las propiedades que se tendrán en cuenta son:

- La cantidad de lados.
- Medida de los ángulos interiores.
- Relación de los lados opuestos.
- Relación de los ángulos opuestos y consecutivos.

Teniendo en cuenta estas y otras propiedades, se pretende que el estudiante conceptualice sobre cuándo dos rectas o segmentos son paralelos o perpendiculares.

Momento 2: metodología.

El proyecto de aula se construirá de manera que el docente tenga un rol de acompañamiento hacia los estudiantes y que sean ellos mediante el uso del material y las guías, los que logren llegar a la conceptualización de paralelismo y perpendicularidad. Por ello, las guías deben ser muy claras en cuanto a las situaciones y las directrices que se plantean al estudiante. Cuando los estudiantes no logren comprender la situación, entonces el docente interviene, no dando la respuesta sino guiando al estudiante mediante una serie de preguntas que logren encaminar la actividad propuesta.

Momento 3: Evaluación.

Marco referencial

Se analizarán los resultados de las actividades propuestas en el proyecto de aula y conforme a los descriptores planteados para cada nivel de comprensión se ubicarán los estudiantes conforme a la teoría de Pirie y Kieren.

2.4. Referente legal

Para el grado quinto, en el área de matemáticas se plantea:

Derecho básico de Aprendizaje (6)	“Identifica y describe propiedades que caracterizan un cuerpo en términos de la bidimensionalidad y la tridimensionalidad y resuelve problemas en relación con la composición y descomposición de las formas “	Dentro de la propuesta, es importante que los estudiantes identifiquen propiedades y relaciones en la composición de diferentes figuras y sólidos.
Estándar de matemáticas Pensamiento espacial y sistemas geométricos (2)	“Comparar y clasificar figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.”	Con la propuesta se quiere llevar al estudiante a la comprensión de los componentes de las figuras planas; principalmente en los cuadriláteros.

Ilustración 3: Derechos básicos en paralelismo y perpendicularidad.

Desde los lineamientos curriculares de matemáticas, se propone para el desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos retomar los planteamientos de Howard Gardner, en su teoría de múltiples inteligencias, la inteligencia espacial como esencial para el pensamiento científico porque es usado para representar, manipular información y solucionar problemas.

Con respecto a los sistemas geométricos, el desarrollo del pensamiento espacial se considera “como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se

Marco referencial

manipulan representaciones mentales de objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas traducciones a representaciones materiales.” (MEN, p. 37).

Los sistemas geométricos se desarrollan desde una exploración “sensorio-motor” que luego va a formar una representación interna del espacio. Dichas construcciones son cognitivas individuales y están influenciadas por las interacciones con el entorno; es por esto, que la escuela debe partir de movimientos corporales, las figuras y los modelos de figuras con palabras del lenguaje cotidiano de los estudiantes.

Se propone un enfoque de la geometría activa que parte de la actividad del alumno y las interacciones con el mundo; moviéndose, dibujado, construir y producir y tomar de allí las representaciones internas.

Desde esta perspectiva se propone para la construcción de los cuerpos, superficies y líneas dejar que los estudiantes pasen sus manos por objetos y superficies; para comprender la amplitud de los ángulos se parte desde los giros con el propio cuerpo, revisar la amplitud, haciendo uso de los brazos partiendo desde una posición hasta llegar a otra.

2.5. Referente espacial

La I.E. La Gabriela está ubicada en la comuna 10, en la zona suroriental del municipio de Bello; ofrece los niveles de preescolar, básica primaria, básica secundaria, media y jornada sabatina.

El Proyecto Educativo Institucional se basa en los fines del sistema educativo colombiano, exponiendo que: debe potenciar el libre desarrollo de la personalidad, la formación en el respeto por la vida, la participación en la toma de decisiones, el respeto a la autoridad, desarrollo de la

Marco referencial

capacidad crítica y reflexiva fortaleciendo el avance científico y tecnológico que impacte en el mejoramiento de la calidad de vida, y la conciencia para la conservación y la protección.

Desde la contextualización del barrio: La comunidad está conformada por personas desplazadas debido a factores de violencia, económicos o de seguridad; esto afecta el sentido de pertenencia y el poco compromiso para mejorar la convivencia.

La comunidad necesita más espacios culturales y escenarios deportivos. Su ubicación permite presenciar un ambiente contaminado, debido a la cercanía de canteras y fábricas; ocasionándole a la población enfermedades en el sistema respiratorio.

Las familias son de escasos recursos, varias de ellas son desplazadas y otras dependen de trabajos informales.

En una gran mayoría, los padres y madres de los estudiantes, no han terminado la primaria o no accedieron al sistema educativo; esto hace que los niños no tengan la educación como un medio de vital importancia para salir adelante, o una meta para su proyecto de vida.

La I.E. La Gabriela dentro de su misión y su visión propone la formación académica desde el humanismo y la conformación de un sólido proyecto de vida.

El modelo pedagógico es humanista; donde el ser humano es el centro de la formación, para volverlo competente en diferentes contextos, se propone el trabajo colaborativo, con un énfasis en la diversidad y la inclusión del individuo.

El rol del educador es investigador, creativo y posibilitador.

El rol del estudiante es observador, solidario y participativo.

La intervención pedagógica se hará con el grupo quinto 4, conformado por 16 niñas y 22 niños; sus edades están entre los 9 y 13 años. Los estratos socioeconómico a los cuales pertenecen están dentro del 1, 2 y 3.

Capítulo 3

3. Diseño metodológico

3.1. Enfoque

La presente propuesta de trabajo de grado tiene como objetivo aplicar un proyecto de aula con un enfoque cualitativo, que permitirá hacer un análisis de los procesos cognitivos de los estudiantes frente al razonamiento de las soluciones que se dan a las situaciones problema que giran en torno al objeto de estudio.

Ahora bien, el modelo que se implementa es la investigación acción educativa, según Restrepo, las fases a tener en cuenta son: deconstrucción, reconstrucción y la evaluación (2012).

Deconstrucción: En esta fase se pretende que el docente mediante la construcción de un diario de campo en el cual escribe de manera detallada lo que sucede con los conocimientos previos que los estudiantes tienen del concepto de paralelismo y perpendicularidad al aplicar una prueba diagnóstica. Como sus respuestas son a partir de la intuición o la percepción que ellos tienen del concepto, entonces es ahí donde se da la deconstrucción del concepto, entonces, a partir de la observación del docente y el diario de campo, se pasa a la siguiente fase.

Reconstrucción: El docente hace una reflexión exhaustiva acerca de los resultados obtenidos en la fase anterior teniendo en cuenta lo escrito en el diario de campo, a partir de esto, se evidencia las dificultades de los estudiantes en la concepción del objeto de estudio. Por lo tanto, el docente busca mejorar los resultados mediante la aplicación de un proyecto de aula, el cual busca que los estudiantes puedan formalizar el concepto matemático.

Diseño metodológico

Evaluación: se aplica una situación problema, en la cual se evalúe los procesos cognitivos de los estudiantes y se verifique el éxito del proyecto de aula, a la vez se actualiza el diario de campo.

3.2. Método

La propuesta de trabajo de grado está enmarcada en un enfoque cualitativo, lo que hace que el análisis de los resultados se haga teniendo en cuenta los procesos de los estudiantes, por lo tanto, el método que se puede implementar es el crítico social, donde en todo momento se tiene en cuenta la reflexión docente frente a la implementación de las estrategias metodológicas al interior del aula.

Los objetivos planteados en la presente propuesta, cumplen con las fases de: método crítico social, se espera que los estudiantes en medio de su proceso de aprendizaje logren sacar sus propias conclusiones a partir de los conocimientos previos y análisis de las propiedades matemáticas del concepto. Fase diagnóstica, el docente investigador aplica una prueba en la cual se pueda identificar las dificultades de los estudiantes con respecto a la comprensión del concepto de paralelismo y perpendicularidad. Fase de análisis, el docente implementa las diferentes actividades basadas en los procesos generales en matemáticas, enmarcados en los niveles de comprensión de Pirie y Kieren. Por último, la fase de evaluación se valida los resultados del proyecto de aula ubicando los estudiantes en uno de los niveles de comprensión de Pirie y Kieren.

Diseño metodológico

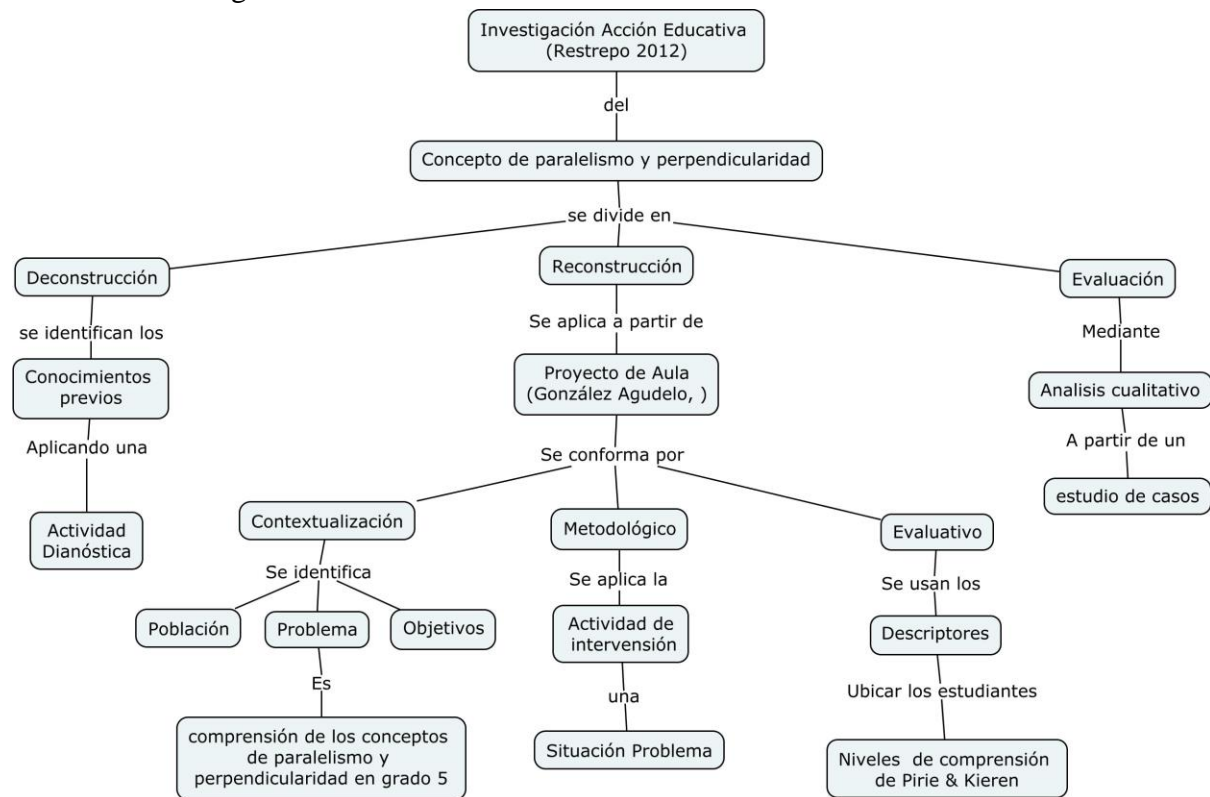


Ilustración 4: Diseño metodológico

3.3. Instrumentos de recolección y análisis de información

En primer lugar, para plantear el problema de la propuesta se analiza los resultados de las pruebas externas realizadas por el ICFES (2017), información disponible por las instituciones, esto hace parte del primer rastreo en la recolección de información ajena a los procesos directos del profesor con los estudiantes, en segundo lugar, se plantean las herramientas metodológicas que el docente crea para la comprensión del concepto matemático. El docente investigador tendrá como instrumento pedagógico el diario de campo, que permitirá hacer una retroalimentación de su proceso de enseñanza a través de la observación y el registro riguroso de la dinámica de clase en la enseñanza del concepto matemático. Dentro de la propuesta metodológica (proyecto de

Diseño metodológico

aula) se hace una encuesta, una prueba diagnóstica, se aplican talleres y un cuestionario final. El análisis de los datos se realizará mediante un estudio de casos.

3.4. Población y muestra

La propuesta tomará como población los estudiantes de grado 5 de la Institución Educativa La Gabriela, ubicada en el municipio de Bello, y se toma como muestra el grupo 5° 4, que cuenta con 37 estudiantes, de los cuales 22 son hombres y 16 son mujeres; en su mayoría pertenecen a los estratos socio económicos 1 y 2.

El proyecto educativo institucional pretende hacer una reivindicación de la población del barrio puesto que han sufrido por situaciones de violencia, desplazamiento y migración. Se busca construir una identidad diferente a través de la educación; desde un modelo pedagógico humanista.

3.5. Delimitación y alcance

Con el trabajo de grado se pretende lograr que los estudiantes de grado 5 comprendan los conceptos matemáticos de paralelismo y perpendicularidad, mediante la implementación de un proyecto de aula, la cual está pensada a partir de los niveles de comprensión planteados por Pirie y Kieren. Estos niveles van a permitir al docente investigador ubicar a los estudiantes en un nivel de razonamiento teniendo en cuenta los descriptores planteados para cada nivel, el análisis de los procesos de razonamiento realizado por los estudiantes, se harán mediante un estudio de casos. Ahora bien, esta estrategia didáctica busca que los estudiantes se motiven a mejorar en sus procesos cognitivos. De ahí que, la propuesta tenga como título “La enseñanza del concepto de paralelismo y perpendicularidad mediante la implementación de un proyecto de aula” y como objetivo general, diseñar un proyecto de aula que permita la comprensión del concepto de

Diseño metodológico

paralelismo y perpendicularidad en estudiantes de grado 5° de la Institución Educativa La

Gabriela.

Actividad Diagnóstica

Objetivo:

Identificar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes de grado quinto acerca de los conceptos matemáticos que tienen que ver con paralelismo y perpendicularidad.

Materiales:




- Regla.
- Transportador.
- Guía didáctica “¿Qué tanto conozco?”

Observa las siguientes figuras y clasifíquelas según las opciones presentadas.

1. Escriba debajo de cada figura cuál o cuáles de las opciones la describen.

- Líneas
- Rayas
- Flechas
- Segmentos
- Rectas

Diseño metodológico

Figura 1	Figura 2	Figura 3
		

Explique, ¿Por qué relacionó las figuras 1, 2, 3 con esas opciones?

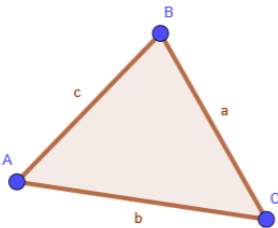
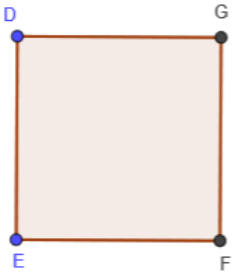
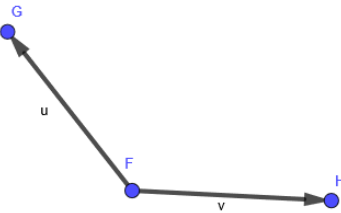
Diseño metodológico

2. Marque con lapicero rojo las líneas que observas en cada una de las imágenes.

La calle	El poste
 <p><i>Ilustración 5: Calle Rue Cremieux, París. Tomado de: https://www.lanacion.com.ar/sociedad/rue-cremieux-la-calle-de-paris-que-se-harto-de-los-instagramers-que-buscan-la-fnid2226655. Crédito de: Instagram.com/cindytopics/</i></p>	 <p><i>Ilustración 6: Tomado de: https://es.aliexpress.com/item/32614730186.html</i></p>

3. Responda las siguientes preguntas a partir de las siguientes figuras.

- Marque con color rojo los ángulos en cada figura.
- Pinte con color verde los lados de cada figura.
- Encierre en color negro el lugar donde se unen dos lados.

Figura 1	Figura 2	Figura 3
		

Diseño metodológico

En la figura 1

- ✓ Los ángulos que encerró en color rojo, ¿podrías escribir que clase de ángulo es?

- ✓ ¿Cómo clasificaría los lados que pintó de color verde?, según estas opciones:

- ☐ Líneas
- ☐ Rayas
- ☐ Flechas
- ☐ Segmentos
- ☐ Rectas

- ✓ En cuántas partes encontró que se unían dos lados

- ☐ ¿Cómo crees que se llama el lugar donde se unen dos lados?

Diseño metodológico

En la figura 2

- ✓ Los ángulos que encerró en color rojo, ¿podrías escribir que clase de ángulo es?



- ✓ ¿Cómo clasificaría los lados que pintó de color verde? según estas opciones:

- ☐ Líneas
- ☐ Rayas
- ☐ Flechas
- ☐ Segmentos
- ☐ Rectas



- ✓ En cuántas partes encontró que se unían dos lados



Diseño metodológico

En la figura 3

✓ Los ángulos que encerró en color rojo, ¿podrías escribir que clase de ángulo es?



✓ ¿Cómo clasificaría los lados que pintó de color verde? según estas opciones:

- ☐ Líneas
- ☐ Rayas
- ☐ Flechas
- ☐ Segmentos
- ☐ Rectas



✓ En cuántas partes encontró que se unían dos lados



Diseño metodológico

4. Define a partir de lo que entiendes:

¿Qué es una recta?	¿Qué es una semirecta?	¿Qué es un segmento?	¿Qué es un ángulo?
Realiza el dibujo de una recta	Realiza el dibujo de una semirecta	Realiza el dibujo de un segmento	Realiza el dibujo de un ángulo

Diseño metodológico

Situación problema

Objetivo:

Comprender el concepto de paralelismo y perpendicularidad mediante el uso de procesos de medición.

Materiales:

- Regla
- Transportador
- Plano del colegio GEOLANDIA
- Guía de instrucciones

Estándar

- Identifico, represento y utilizo ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas. (MEN, Estándares básicos de competencias en matemáticas: potenciar el pensamiento matematico: ¡un reto escolar!, 2006)

DBA

- Resuelve y propone situaciones en las que es necesario describir y localizar la posición y la trayectoria de un objeto con referencia al plano cartesiano. (MEN, 2016)

Actividad de intervención: Paramelio y Perpendio

Paramelio y Perpendio son dos personajes con unas conductas particulares para hacer sus recorridos, ellos son docentes de matemáticas en la **Institución Educativa GEOLANDIA**.

Paramelio para ir de un lugar a otro en la Institución Educativa busca un camino que cumpla con la siguiente condición:

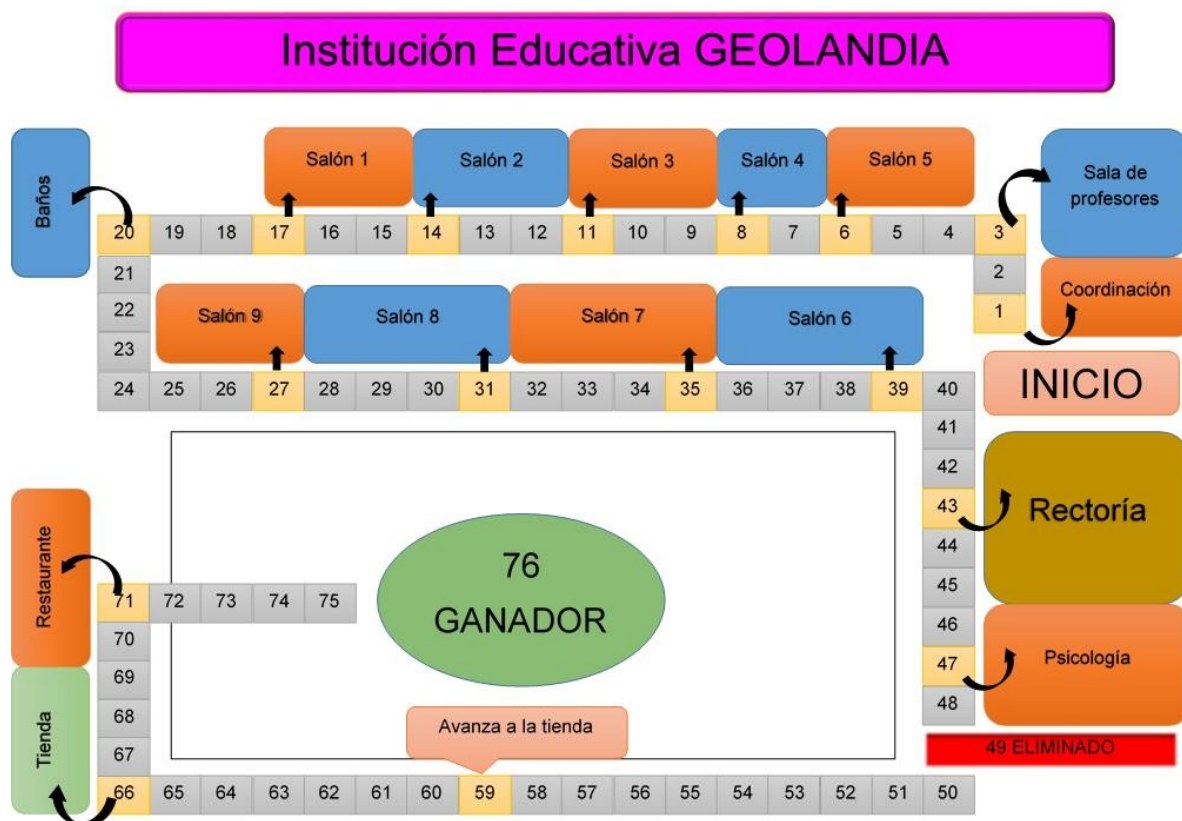
- **El desplazamiento es siguiendo una línea recta, no tiene la capacidad de realizar giros.**

Diseño metodológico

Perpendio para desplazarse de un lugar a otro en la Institución Educativa GEOLANDIA busca un camino que cumpla con las siguientes condiciones:

- **Realizar giros.**
- **El desplazamiento es siguiendo una línea recta.**

Para entender la forma como se desplazan Paramelio y Perpendio al interior de GEOLANDIA sus compañeros se dieron cuenta que los giros que Perpendio realiza tiene un sentido particular, él gira un cuarto de vuelta a la izquierda o derecha según sea el recorrido y su desplazamiento es en línea recta. A continuación, se muestra un plano de la planta baja de la Institución Educativa GEOLANDIA.



Diseño metodológico

Los profesores Paramelio y Perpendio proponen una actividad a sus estudiantes de grado 5, en ella deben seguir una serie de instrucciones aplicando la forma como los profesores Paramelio y Perpendio se mueven al interior de la Institución.

Alberto y Jazmín, son los estudiantes escogidos, Alberto tiene la capacidad de moverse como Paramelio y Jazmín se mueve como Perpendio.

1. ¿Puede Alberto desde cualquier punto recorrer toda la Institución Educativa GEOLANDIA, aplicando los movimientos de Paramelio? Explique su respuesta.



2. ¿Puede Jazmín recorrer toda la Institución, aplicando los movimientos de Perpendio? Explique su respuesta



3. ¿Es posible que Alberto llegue a la tienda desde cualquier punto de la Institución?, Usando el plano, ¿en qué punto diferente a la tienda lo ubicarías?, ¿por qué?



Diseño metodológico

4. Si Jazmín y Alberto inician un recorrido juntos, ¿cuál de los dos puede realizar el recorrido más largo?, ¿Cuál es el recorrido más largo de cada uno en el plano de la Institución?

5. Si Alberto se ubica en el salón 9, ¿puede cumplir la información de la tarjeta? Explique su respuesta.

6. Si Alberto parte del punto 24 y avanza hasta el punto 40, al mismo tiempo Jazmín parte del punto 50 y avanza hasta la tienda (punto 66), ¿es posible que en algún momento del recorrido ocupen el mismo punto? Explique su respuesta.

Diseño metodológico

7. Dibuja el siguiente recorrido usando la regla, Alberto está en el salón 2 (punto 14) y Jazmín está en los baños punto 20, Si Alberto avanza a los baños y Jazmín al punto 24. ¿Qué podrías concluir del recorrido de ambos, teniendo en cuenta el dibujo? ¿Qué forma tiene el dibujo de los recorridos?

Dibujo	Explicación

8. Dibuja el siguiente recorrido usando la regla, Jazmín se ubica en el punto 4 y Alberto se ubica en el punto 50. Ambos inician el recorrido al mismo tiempo, Jazmín llega hasta los baños y Alberto llega hasta la tienda. ¿Qué forma tiene el dibujo que construyó? ¿Cómo lo describes?

Dibujo	Explicación

Diseño metodológico

9. Teniendo en cuenta el recorrido del ejercicio 8 de Jazmín y Alberto, Si ellos continuaran ese recorrido en la misma dirección por largo tiempo. ¿Qué crees que pasaría? ¿sería posible que se encontraran? ¿por qué?

10. Si Jazmín parte desde el punto INICIO, escriba cuántos giros a la derecha y a la izquierda realiza para llegar al punto 76 GANAMOS.

Giros a la derecha	Giros a la izquierda

11. Podrías escribir, ¿qué clase de ángulo se forma cuando Jazmín hace los giros? ¿cómo se llama ese ángulo?

12. Verifique y escriba en cuáles de las casillas amarillas al sacar la tarjeta Alberto **NO** puede estar, es decir, no puede cumplir con la información de la tarjeta. ¿Por qué?

Diseño metodológico

3.6. Explicación de las preguntas de la guía de intervención

El objetivo de explicar de cada una de las preguntas, es mostrar la intencionalidad que tiene el docente para que el estudiante comprenda el concepto de paralelismo y perpendicularidad.

Pregunta 1: En las instrucciones se muestra cuáles son las condiciones de Paramelio y Perpendio para moverse al interior de la Institución. Los estudiantes escogidos deben seguir las mismas reglas en el movimiento de sus profesores. Por lo tanto, Alberto se mueve como Perpendio, como Perpendio no puede hacer giros Alberto tampoco, entonces, la intencionalidad de la pregunta es identificar hasta qué punto el estudiante reconoce que Alberto no puede moverse por toda la Institución, solo puede moverse por algunos lugares, en los que no haya giros. En algunos de los puntos donde se ubique Alberto tendrá un recorrido más largo que ubicándose en otro lugar, se espera que el estudiante responda que no es posible recorrer toda la Institución aplicando esos movimientos porque solo se puede mover en línea recta. El estudiante debe entender que es una línea recta y como se da el desplazamiento en línea recta.

Pregunta 2: Dadas las instrucciones Jazmín puede realizar los movimientos de Perpendio. Perpendio puede realizar recorridos en línea recta y giros, por lo tanto, Jazmín puede hacer recorridos en línea recta y giros, entonces no importa en qué punto se ubique Jazmín podrá llegar a cualquier lugar de la Institución. Se espera que el estudiante responda, que dadas las condiciones del movimiento de Jazmín si puede recorrer toda la Institución. El estudiante identifica que los giros que realiza Jazmín miden 90° es decir, que son rectos, entiende qué es una línea recta y como se da el desplazamiento en línea recta.

Pregunta 3: Teniendo en cuenta las instrucciones en cuanto a los movimientos que puede realizar Paramelio el recorrido para llegar a la tienda solo lo puede hacer si se ubica de tal forma

Diseño metodológico

que se desplace en línea recta, es decir, no se puede ubicar en cualquier punto. Se espera que el estudiante responda, que no puede dirigirse a la tienda desde cualquier punto, porque solo puede avanzar en línea recta. Ahora bien, para llegar a la tienda se puede ubicar en cualquier punto desde el 50 hasta el 65. El estudiante comprende que es una línea recta y como se da el desplazamiento rectilíneo, que pueden ser movimientos cortos o prolongados.

Pregunta 4: Debido a las condiciones en los movimientos de Paramelio y Perpendio, si Jazmín y Alberto salen desde el mismo punto en todo momento, Jazmín realizará el recorrido más largo puesto que ella puede hacer giros, mientras que, Alberto no los puede hacer, solo hace recorridos en línea recta. El estudiante entiende que la posibilidad de girar incrementa los desplazamientos. Se espera que los estudiantes respondan que el recorrido más largo de Jazmín es desde el punto 1 hasta el punto 76, o sea que recorre toda la Institución y el recorrido más largo de Alberto es ubicándose en el punto 3 y llegando al punto 20.

Pregunta 5: La condición que cumple los movimientos de Alberto no permiten que él realice giros, Alberto solo se puede mover en línea recta, por lo tanto, se espera que el estudiante responda que no puede cumplir con la información que da la tarjeta, “*retrocede 5 casillas*”, porque tendría que hacer un giro.

Pregunta 6: Esta pregunta tiene la intencionalidad de indagar en el estudiante la concepción que tiene de paralelismo, se puede observar cómo los recorridos que hacen Alberto y Jazmín en la situación son paralelos. Se espera que el estudiante responda que no es posible que ellos se encuentren, porque los puntos del recorrido de Alberto están separados por una misma distancia de los puntos del recorrido de Jazmín.

Pregunta 7: En esta pregunta se indaga en el estudiante sobre la concepción de perpendicularidad entre dos rectas, se puede observar que la gráfica que da cuenta de los

Diseño metodológico

recorridos de Alberto y Jazmín forman un ángulo recto en el punto 20, que corresponde a los baños.

Pregunta 8: Esta pregunta pretende llevar al estudiante a un acercamiento al concepto de perpendicularidad entre dos rectas al igual que en la pregunta 6. En este caso, la pregunta le pide al estudiante que describa la forma del dibujo, se espera que el estudiante responda que son dos líneas que no se cruzan y están en todo momento a igual distancia.

Pregunta 9: Cuando dos rectas son paralelas, no se cruzan en ningún punto en el infinito, el objetivo de la pregunta es verificar qué tanto comprende el estudiante el concepto de paralelismo entre dos rectas. Se espera que el estudiante responda que nunca se encuentran en sus recorridos, porque las rectas; una de la otra, están a una misma distancia en todo momento.

Pregunta 10: En esta pregunta se pretende indagar la comprensión del estudiante del concepto de perpendicularidad, en las indicaciones acerca de los movimientos de Paramelio y Perpendio, se hace una descripción del tipo de giros que puede hacer Perpendio; en este caso se espera que el estudiante entienda que los giros que hace Jazmín son de 90° , estos giros forman un ángulo recto.

Pregunta 11: Presentada la información donde se describe que tipo de movimiento puede realizar Perpendio, se dice que los giros equivalen a un cuarto de vuelta, a partir de estos datos se espera que los estudiantes respondan que este ángulo equivale a 90° y los giros forman un ángulo recto.

Pregunta 12: Si Alberto solo puede hacer recorridos rectos, no puede estar en un salón que lo obligue a realizar giros, entonces en las casillas que no puede estar es: la coordinación, el salón 1, salón 9, salón 7, salón 6, psicología.

Diseño metodológico

3.7. Descriptores

Para cada uno de los niveles de comprensión que definen Pirie y Kieren, se crean unos descriptores que permiten ubicar a cada uno de los estudiantes en uno de los niveles basados en la comprensión que tengan del concepto matemático que se esté estudiando.

Nivel 1. Conocimiento primitivo, conocimientos previos.

- Clasifica las líneas a partir de su longitud (largas, cortas).
- Identifica un ángulo en una figura o polígono.
- Reconoce la dirección de una línea (arriba, abajo, derecha, izquierda).

Nivel 2. Creación de imagen.

- Identifican algunos desplazamientos rectos.
- Reconocen algunos giros en los desplazamientos.

Nivel 3. Comprensión de la imagen.

- Relacionan los desplazamientos rectos con líneas rectas.
- Relacionan los giros en los desplazamientos como ángulos.

Nivel 4. Observación de la propiedad.

- Identifica que los giros en los desplazamientos son rectos y miden 90° .
- Clasifica los ángulos según su medida.
- Identifica que las rectas se pueden cruzar en un punto o no cruzarse.
- Intuye que en los desplazamientos en línea recta largos puede que no acabe el recorrido (acercamiento a infinito).
- Intuye que dos o más desplazamientos en línea recta se pueden cruzar o no cruzarse a lo largo del recorrido.

Diseño metodológico

Nivel 5. Formalización.

- Identifican que dos rectas son paralelas cuando las asocian a recorridos que no terminan y además no se encuentran.
- Reconocen que una recta es perpendicular a otra cuando los recorridos se encuentran en un punto después de hacer un giro de 90° .

Nivel 6. Observación.

- El estudiante define que dos rectas son paralelas cuando cada uno de sus puntos está a igual distancia de los puntos de la otra.
- Reconoce que la distancia entre un punto y una recta es el segmento que cae perpendicular a esta.
- Comprende que dos rectas son perpendiculares cuando estas se cortan en un punto formando un ángulo de 90° .

Nivel 7. Estructuración.

- Identifica los teoremas relacionados con perpendicularidad y paralelismo.
- Logra comprender que una recta es paralela a sí misma.
- Reconoce que hay infinitas rectas paralelas a una recta.
- Comprende que una recta está compuesta por infinitos puntos colineales.
- Identifica que si dos rectas m, n son perpendiculares a una recta p , entonces las rectas m, n son paralelas.

Nivel 8. Invención.

- Relación de las rectas con una circunferencia.
- Comprensión de las rectas tangentes y secantes a una curva en un punto.

Capítulo 4

4. Análisis de los resultados

El trabajo de grado propone una nueva estrategia de enseñanza del concepto de paralelismo y perpendicularidad mediante el uso de un proyecto de aula enmarcado en los procesos de razonamiento propuestos por Pirie y Kieren.

En los niveles de razonamiento se definen unos descriptores que ubican a cada uno de los estudiantes en uno de los niveles, para realizar esta caracterización de los estudiantes se propone hacer un análisis cualitativo de los resultados.

Cuando se habla de un análisis cualitativo en el proceso de dar los resultados encontrados se debe tener en cuenta algunos aspectos característicos de los estudiantes, como: el contexto del estudiante y la actitud del este frente a la actividad propuesta. Los resultados del estudio permitieron dar respuesta a la pregunta de investigación y dar consecución a los objetivos planteados.

4.1. Estudio de casos

El análisis cualitativo se realizará mediante un estudio de casos a partir de la teoría de la de Stake (1999). El autor propone escoger el trabajo realizado por uno o varios estudiantes que cumplan con una característica planteada por el investigador.

Este método de análisis es coherente con el presente trabajo ya que permite realizar un análisis minucioso de los procesos de razonamiento de los estudiantes al dar solución a cada una de las preguntas propuestas en el proyecto de aula y de esta manera realizar una caracterización

Análisis de resultados

de estos y ubicarlos en uno de los niveles de razonamiento a partir de los descriptores definidos para cada uno de ellos.

4.1.1. Criterios para escoger los casos:

En el trabajo se analizarán 3 casos, los cuales deben cumplir con las siguientes condiciones:

- Responder todas preguntas planteadas en el proyecto de aula.
- Algunas de las respuestas de los estudiantes son comunes.
- En las preguntas donde el estudiante debe dar cuenta de la comprensión del concepto se encuentran grandes diferencias en sus respuestas.

Los casos para analizar serán etiquetados como C1, C2 y C3

4.2. Caso 1. C1:

Pregunta 1:

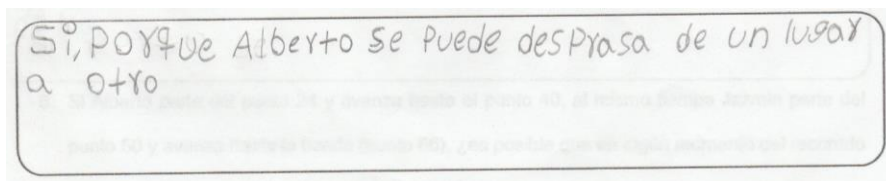


Ilustración 7: Respuesta de C1 a la pregunta 1

Se puede observar como el estudiante no identifica las propiedades de los movimientos que puede realizar Alberto al interior de la Institución. De ahí que, no se dé cuenta que Alberto no puede recorrer la Institución iniciando desde cualquier punto.

Pregunta 2:

Análisis de resultados

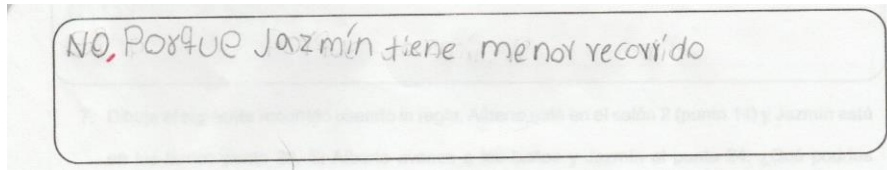


Ilustración 8: Respuesta de C1 a la pregunta 2

En la respuesta del estudiante se puede evidenciar que no comprende los movimientos que Jazmín puede realizar al recorrer la Institución, se pretende que el estudiante responda que Jazmín puede recorrer toda la Institución debido a la regla de sus movimientos puede avanzar en línea recta y realizar giros.

Pregunta 3:

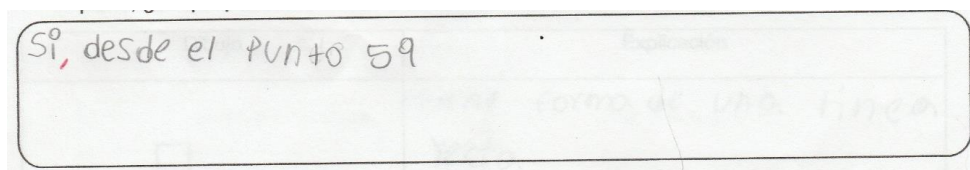


Ilustración 9: Respuesta de C1 a la pregunta 3

El estudiante entiende que Alberto no puede recorrer la Institución desde cualquier punto, a pesar de que en esta pregunta 1 se tiene una respuesta errónea, en la medida que avanza la actividad se aclaran algunas dudas de los tipos de movimientos de Alberto y Jazmín. Su respuesta es correcta, pero se esperaba que tuviera una respuesta más amplia, ya que se puede ubicar a Alberto en cualquier punto a partir del punto 50 hasta el 65, el estudiante solo escoge un punto.

Pregunta 4:

Análisis de resultados

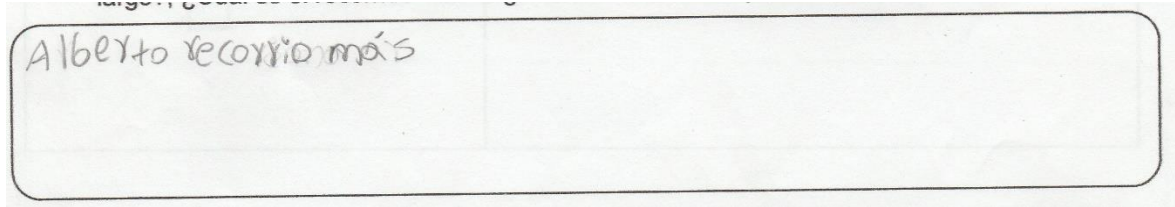


Ilustración 10: Respuesta de C1 a la pregunta 4

El estudiante no comprende que Jazmín y Alberto pueden hacer recorridos diferentes dadas unas condiciones, Alberto solo puede realizar recorridos en línea recta y Jazmín puede realizar desplazamientos en línea recta y hacer giros, por lo tanto, se espera que el estudiante respondiera que Jazmín puede realizar un desplazamiento más largo que Alberto, pero su respuesta es que Alberto hace el recorrido más largo, lo cual evidencia que al estudiante se le dificulta entender qué es una línea recta y un ángulo (giros).

Pregunta 5:

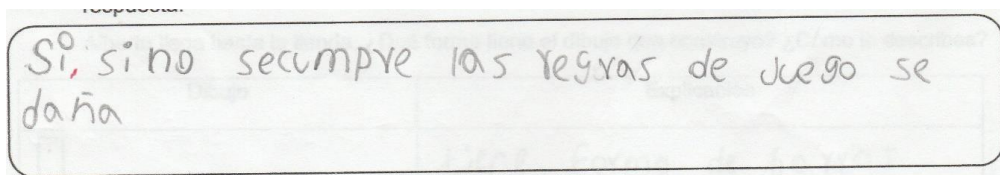


Ilustración 11: Respuesta de C1 a la pregunta 5

Hay dificultad en la interpretación de la pregunta por parte del estudiante, no relaciona la pregunta con los conceptos matemáticos que se están tratando, Se esperaba que el estudiante respondiera que Alberto no puede cumplir con la instrucción de la tarjeta, porque no puede realizar giros.

Pregunta 6:

Análisis de resultados

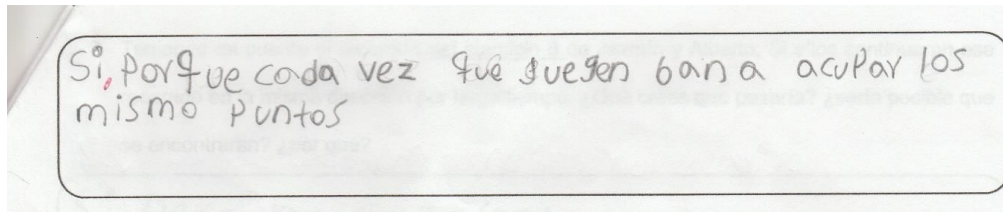


Ilustración 12: Respuesta de C1 a la pregunta 6

El estudiante no relaciona la pregunta con el concepto matemático que se está trabajando en la guía, no identifica los recorridos planteados como líneas rectas, se pretende que el estudiante responda que en el recorrido no se encuentran.

Pregunta 7:


Dibujo	Explicación
	tiene forma de una línea recta

Ilustración 13: Respuesta de C1 a la pregunta 7

El estudiante no comprende el concepto de ángulo, no identifica en la pregunta cómo se dan los recorridos de Alberto y Jazmín, se esperaba que el estudiante respondiera que se forma un ángulo recto y su vértice es el punto 20 que corresponde a los baños.

Pregunta 8:

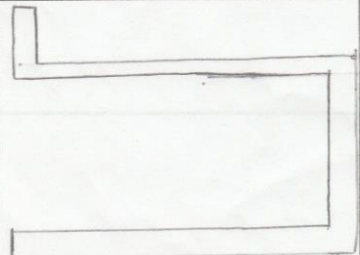
Dibujo	Explicación
	tiene forma de varias líneas rectas

Ilustración 14: Respuesta de C1 a la pregunta 8

Análisis de resultados

El estudiante tiene idea de los recorridos que realiza Alberto y Jazmín, puesto que en su respuesta menciona las líneas rectas, pero no comprende que los recorridos son paralelos, dadas las condiciones que se dan en la pregunta.

Pregunta 9:

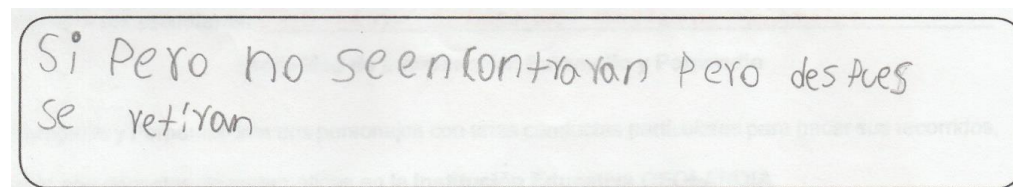


Ilustración 15: Respuesta de C1 a la pregunta 9

El estudiante no comprende cuando dos rectas son paralelas, no interpreta los conceptos matemáticos en la pregunta basado en los recorridos descritos por Alberto y Jazmín. Se pretende que el estudiante responda que no se encuentran puesto que son recorridos rectos, además, cumple con la definición de rectas paralelas.

Pregunta 10:

Giros a la derecha	Giros a la izquierda
1 Giro	2 Giros

11. Podrías escribir ¿qué clase de ángulo se forma cuando...

Ilustración 16: Respuesta de C1 a la pregunta 10

El estudiante logra identificar algunos de los giros que realiza Jazmín para llegar a la meta, pero no comprende que Jazmín para llegar a la meta partiendo desde el punto de inicio debe realizar 3 giros a la izquierda y 4 giros a la derecha; por lo tanto, el estudiante no logra comprender cuales son las características de los ángulos.

Pregunta 11:

Análisis de resultados

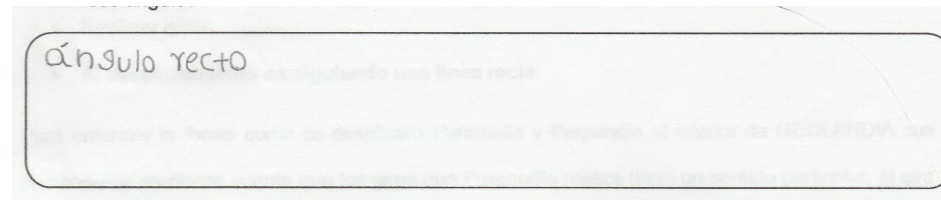


Ilustración 17: Respuesta de C1 a la pregunta 11

La respuesta del estudiante es correcta, aunque se puede observar en sus respuestas anteriores que el concepto de ángulo no se comprende puesto que no identifica las características y propiedades de los ángulos.

Pregunta 12:

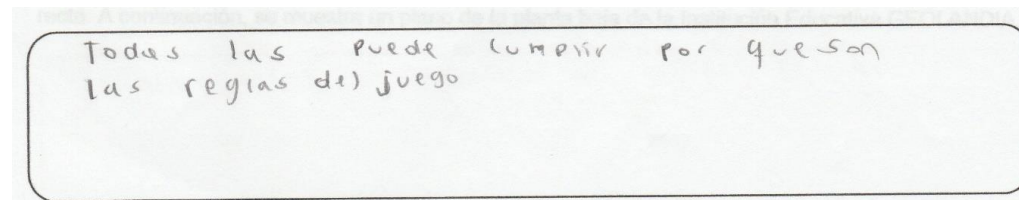


Ilustración 18: Respuesta de C1 a la pregunta 12.

El estudiante no interpreta los conceptos matemáticos planteados en las preguntas, no es claro los movimientos de Alberto y Jazmín a la hora de responder las preguntas. Se pretende que el estudiante responda que debido al tipo de movimiento que puede realizar Alberto no puede cumplir con las condiciones presentadas en algunas de las tarjetas, puesto que él no puede realizar giros. Por ejemplo: la tarjeta de la coordinación, salón 1, salón 9, salón 7, salón 6, psicología.

Teniendo en cuenta las respuestas presentadas por el estudiante, no cumple con los descriptores planteados para el nivel 2 de comprensión planteado por Pirie y Kieren, por lo tanto, no avanza al siguiente nivel de comprensión, el estudiante no identifica las características y propiedades de un ángulo, de dos líneas rectas cuando son paralelas o perpendiculares.

Análisis de resultados

4.3. Caso 2. C2:

Pregunta 1:

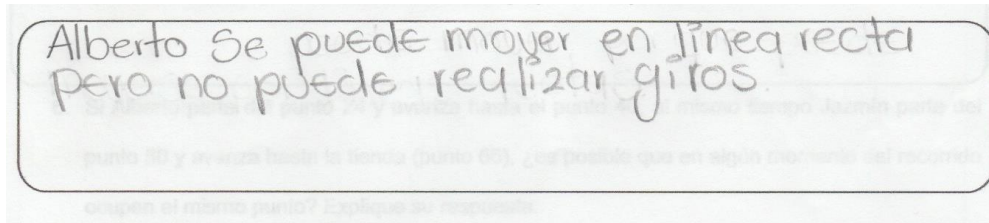


Ilustración 19: Respuesta de C2 a la pregunta 1.

Se puede observar como el estudiante responde correctamente, teniendo en cuenta las características de los movimientos de Alberto y Jazmín. Entiende que es una línea recta y cuales son algunas de las propiedades de los ángulos.

Pregunta 2:

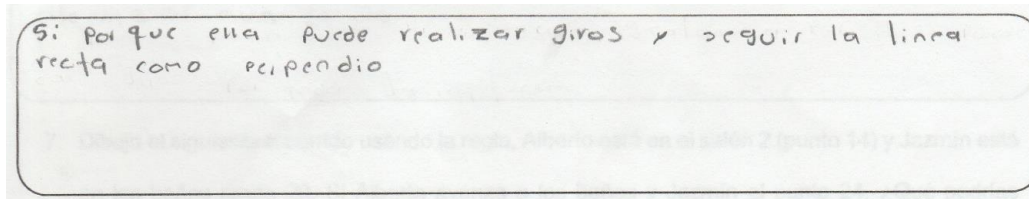


Ilustración 20: Respuesta de C2 a la pregunta 2.

Es claro para el estudiante cuales son las características de los movimientos de Alberto y Jazmín para recorrer la Institución, identifica qué es un giro y qué es un desplazamiento recto. La respuesta es correcta.

Pregunta 3:

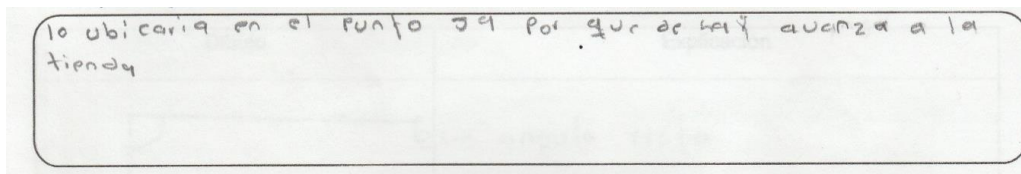


Ilustración 21: Respuesta de C2 a la pregunta 3

Análisis de resultados

A pesar de tener la respuesta correcta, se espera que el estudiante logre identificar como debido al tipo del recorrido de Alberto, este se puede ubicar en cualquier punto del 50 al 65. El estudiante lo ubica en el punto 59 porque de ahí salta a la tienda automáticamente. Se puede observar que el estudiante comprende el concepto de línea recta y la relaciona con los recorridos al interior del colegio.

Pregunta 4:

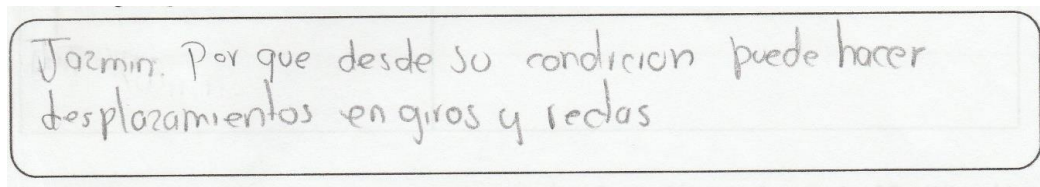


Ilustración 22: Respuesta de C2 a la pregunta 4

Es claro para el estudiante los recorridos que puede realizar Alberto y Jazmín, de ahí que, relaciones los conceptos matemáticos con las respuestas de la actividad. Identifica las características particulares de las rectas y los ángulos; las rectas como recorridos o desplazamientos y los ángulos como giros a la derecha o a la izquierda.

Pregunta 5:

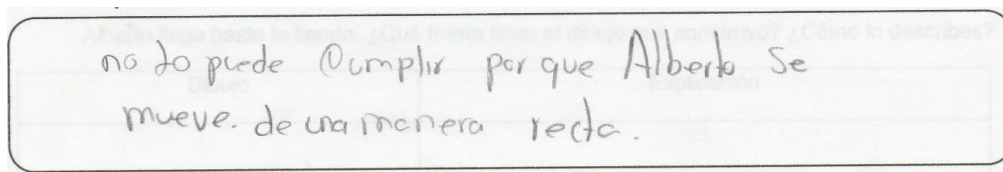


Ilustración 23: Respuesta de C2 a la pregunta 5

Análisis de resultados

Aunque el estudiante responde correctamente, no da una justificación matemática partiendo de las propiedades de los conceptos. Entiende que Alberto tiene algunas limitaciones en sus recorridos no puede girar, aun así, no lo escribe.

Pregunta 6:

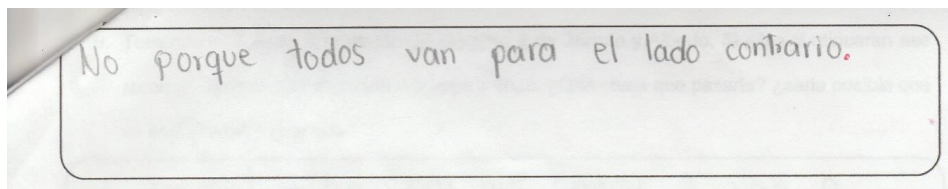


Ilustración 24: Respuesta de C2 a la pregunta 6.

El estudiante responde no, porque van por el lado contrario; la respuesta es correcta, pero se espera una respuesta con una justificación matemática donde se verifique comprender los conceptos de línea recta y ángulo, se puede verificar que el estudiante de manera intuitiva entiende que dos desplazamientos con las características que se especifican no se cruzan.

Pregunta 7:

Dibujo	Explicación
<p>Bar 5</p> <p>Salon 2</p> <p>20. 19 18 17 16 15 14</p> <p>21</p> <p>22</p> <p>23</p> <p>24</p>	<p>Alberto avanza a los baños y puede lanzar de nuevo Jazmín estaba en los baños y lanzo de nuevo y sacó 4 donde pudo avanzar al punto 24 una L al revés</p>

Ilustración 25: Respuesta de C2 a la pregunta 7

El estudiante logra identificar la forma de los recorridos de Alberto y Jazmín, pero no lo relaciona con el concepto matemático que se está trabajando en la guía. El estudiante afirma que tiene forma de L, pero no identifica que se forma un ángulo recto.

Análisis de resultados

Pregunta 8:

Dibujo	Explicación
	<p>Son dos líneas rectas que forman como un rectángulo.</p> <p>Están formados con varias casillas y van de un extremo a otro.</p>

Ilustración 26: Respuesta de C2 a la pregunta 8

El estudiante logra identificar que los recorridos se dan de manera recta y los relaciona con un cuadrilátero, en este caso con un rectángulo. Se puede intuir que el estudiante entiende el concepto de paralelismo en términos de los lados opuestos del cuadrilátero (rectángulo) es una propiedad de este, “lados opuesto son paralelos e iguales”. Ya el estudiante utiliza un lenguaje matemático para dar sus respuestas.

Pregunta 9:

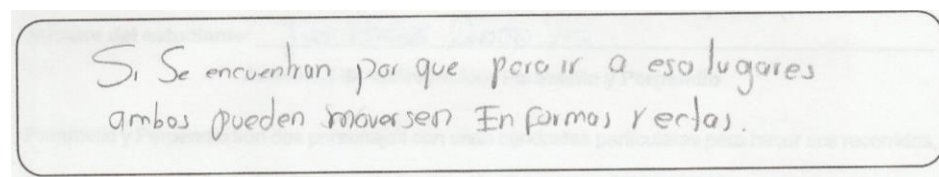


Ilustración 27: Respuesta de C2 a la pregunta 9.

El estudiante no logra entender la intención de la pregunta, se pide al estudiante que de una definición intuitiva de lo que son dos rectas paralelas, pero no se logra. No obstante, entiende que el movimiento de Alberto y Jazmín es en línea recta.

Pregunta 10:

Análisis de resultados

Giros a la derecha	Giros a la izquierda
Cuatro Giros	Tres Giros

Ilustración 28: Respuesta de C2 a la pregunta 10.

El estudiante entiende cuales son los giros que realiza Jazmín para llegar a la meta. Por lo tanto, se puede concluir que comprende que un ángulo es un giro a la derecha o izquierda. La respuesta es correcta.

Pregunta 11:

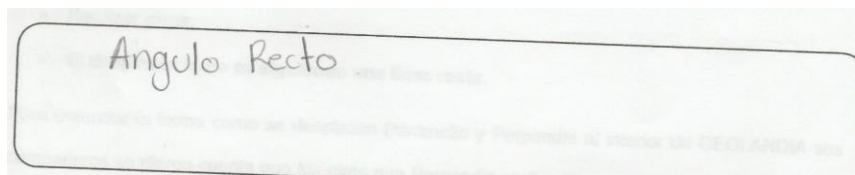


Ilustración 29: Respuesta de C2 a la pregunta 11.

El estudiante identifica que los giros realizados por Jazmín forman un ángulo recto, de ahí se puede deducir que el estudiante intuye que dos rectas son perpendiculares cuando forman entre ellas un ángulo recto.

Respuesta 12:

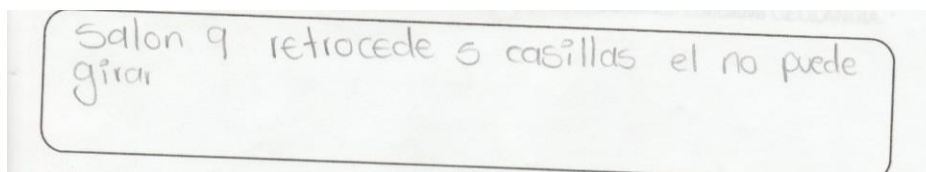


Ilustración 30: Respuesta de C2 a la pregunta 12.

Análisis de resultados

El estudiante logra identificar una de las casillas en las cuales Alberto no puede estar, debido a la característica de su movimiento, justifica la razón por la cual no puede estar ahí, pero, no logra encontrar las demás casillas en las cuales no puede estar Alberto. Se puede deducir que el estudiante entiende lo que es una recta y un ángulo recto.

Teniendo en cuenta las respuestas del estudiante en la actividad, se puede concluir que cumple con los descriptores planteados para el nivel 3 de comprensión planteado por Pirie y Kieren, donde el estudiante relaciona los desplazamientos rectos con líneas rectas y los giros como ángulos. No avanza al siguiente nivel por que el estudiante no logra identificar las propiedades y características de los conceptos matemáticos trabajados en la actividad.

4.4. Caso 3. C3:

Pregunta 1:

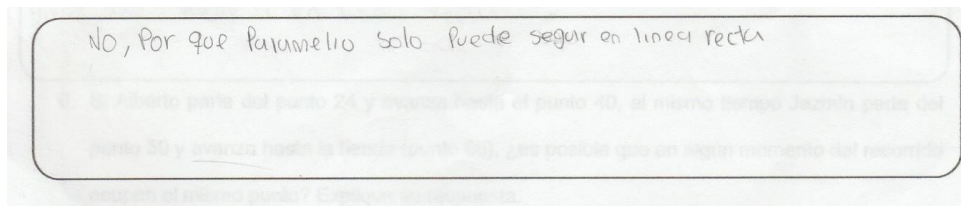


Ilustración 31: Respuesta de C3 a la pregunta 1.

El estudiante entiende que Alberto solo puede hacer recorridos en línea recta, por lo tanto, relaciona los desplazamientos rectos con líneas rectas.

Pregunta 2:

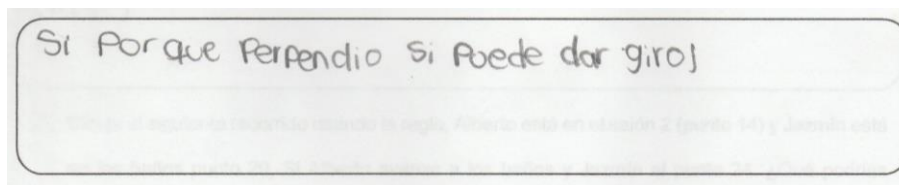


Ilustración 32: Respuesta de C3 a la pregunta 2.

Análisis de resultados

El estudiante tiene claro los movimientos que puede realizar cada integrante de la actividad, en este caso comprende que Perpendio puede recorrer toda la Institución por que puede girar, mientras que Paramelio no lo puede hacer. Relaciona los giros con ángulos.

Pregunta 3:

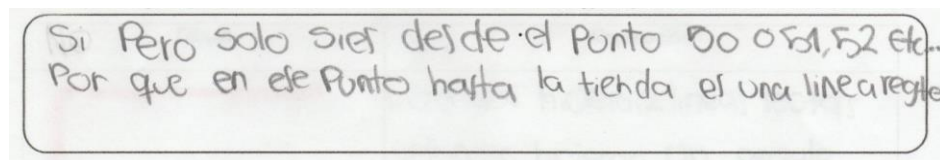


Ilustración 33: Respuesta de C3 a la pregunta 3

El estudiante entiende que el recorrido de Alberto debe ser en línea recta, si quiere ir desde un punto de la Institución a la tienda, este punto debe estar sobre la línea del recorrido de Alberto. Los únicos puntos que cumplen con esta condición son del 50 hasta el 65. Por lo tanto, se puede concluir que el estudiante comprende intuye que una línea recta está compuesta por infinitos (muchos puntos) puntos colineales.

Pregunta 4:

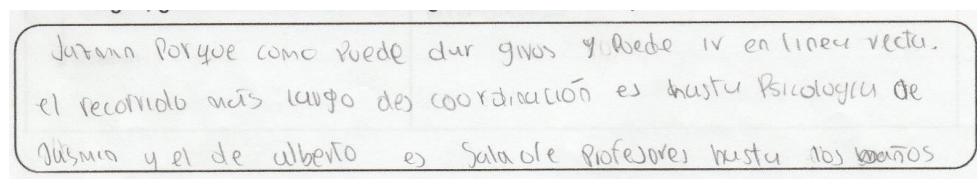


Ilustración 34: Respuesta de C3 a la pregunta 4.

El estudiante identifica quién hace el recorrido más largo (Jazmín) y da una explicación del por qué lo puede hacer. En este caso, puede girar y desplazarse en línea recta, mientras que Alberto solo puede hacerlo en línea recta; determina que el recorrido más largo es desde el punto 3 hasta el 20. Aunque identifica que Jazmín realiza el recorrido más largo en la Institución, no logra deducir que puede llegar hasta el final (en el punto 76). Se puede concluir que el estudiante identifica los recorridos como líneas rectas y los giros como ángulos.

Análisis de resultados

Pregunta 5:

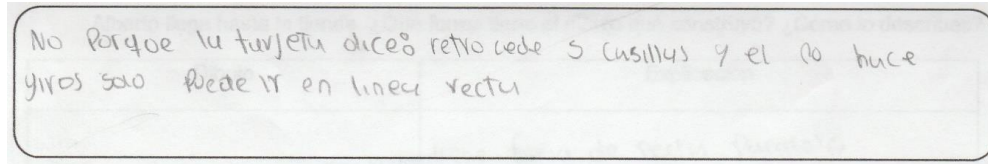


Ilustración 35: Respuesta de C3 a la pregunta 5.

El estudiante comprende que los recorridos rectos corresponden a una línea recta, de ahí que cuando se pida realizar un giro, entonces determina que ya no se puede ir en línea recta, es por ello que Alberto no puede cumplir con el recorrido puesto que tendría que girar y esto no es permitido en su movimiento.

Pregunta 6:

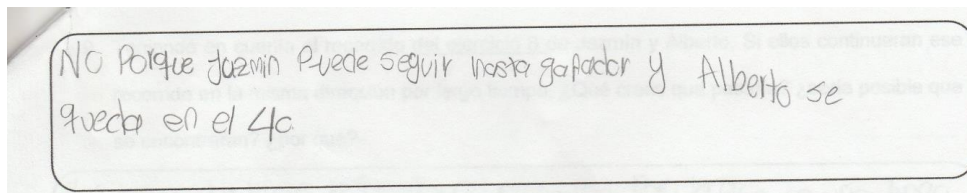


Ilustración 36: Respuesta de C3 a la pregunta 6.

El estudiante entiende que Alberto y Jazmín no se van a encontrar en el recorrido que hacen, pero no logra deducir que los recorridos son dos rectas paralelas.

Pregunta 7:

Dibujo	Explicación
	<p>que alberto tuvo un retomdo luego y jazmin vno corto.</p> <p>el dibujo tiene forma de linea o recta perpendicular</p>

Ilustración 37: Respuesta de C3 a la pregunta 7.

Análisis de resultados

El estudiante comprende que cuando dos rectas se encuentran en un punto y forman un ángulo recto (90°) entonces ellas son perpendiculares. El estudiante deduce que los recorridos de Alberto y Jazmín forman un ángulo de 90° entonces los recorridos son perpendiculares.

Pregunta 8:

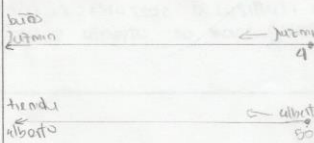
Dibujo	Explicación
	<p>tiene forma de recta paralela</p> <p>que surgen desde un mismo punto que van a una dirección recta</p>

Ilustración 38: Respuesta de C3 a la pregunta 8.

El Estudiante entiende que los recorridos de Alberto y Jazmín son líneas rectas que no se cruzan, además, puede verificar que cada uno de los puntos del recorrido de Alberto están a igual distancia de los puntos del recorrido de Jazmín. El estudiante intuye que estos recorridos son paralelos por la posición de los recorridos.

Pregunta 9:

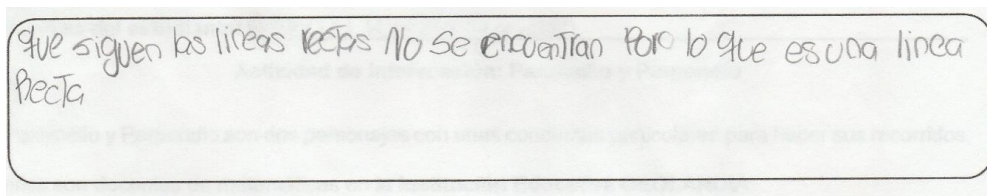


Ilustración 39: Respuesta de C3 a la pregunta 9.

El estudiante entiende que los recorridos son paralelos, pero no logra identificar que estas rectas no se cortan en el infinito, es decir, todavía no reconoce el concepto de infinito.

Pregunta 10.

Análisis de resultados

Giros a la derecha	Giros a la izquierda
4	3

Ilustración 40: Respuesta de C3 a la pregunta 10.

El estudiante comprende los giros a la derecha o a la izquierda como ángulos. Reconoce que Jazmín puede recorrer cualquier lugar de la Institución por la condición de su movimiento.

Pregunta 11:

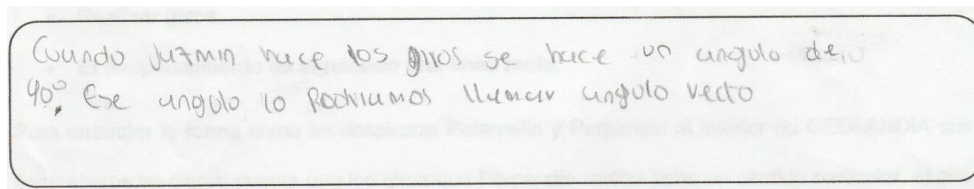


Ilustración 41: Respuesta de C3 a la pregunta 11.

El estudiante comprende el concepto de ángulo y algunas de las características de este, puede clasificarlos según sus lados y medida. En este caso, identifica cuándo un ángulo es recto y lo clasifica según la medida (90°).

Pregunta 12:

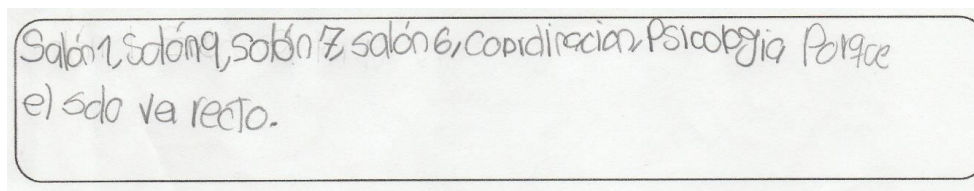


Ilustración 42: Respuesta de C3 a la pregunta 12.

El estudiante comprende que Alberto no puede girar por las condiciones de su movimiento, identifica en qué puntos del tablero no puede estar, pues la tarjeta pide que realice giros y él no lo puede hacer. Reconoce los desplazamientos rectos como líneas rectas.

Análisis de resultados

Teniendo en cuenta las respuestas presentadas por C3 se puede ubicar en el nivel 4 de comprensión propuestos por Pirie y Kieren, puesto que cumple con los descriptores planteados, numeral 3.7. El estudiante comprende cuándo un ángulo es recto, identifica cuándo dos rectas son paralelas o perpendiculares y lo justifica teóricamente.

Conclusiones

Capítulo 5

5. Conclusiones

5.1. Consecución de los objetivos

Objetivo general:

Diseñar un proyecto de aula que permita la comprensión del concepto de paralelismo y perpendicularidad en estudiantes de grado 5° de la Institución Educativa La Gabriela.

Para alcanzar el objetivo general de este proyecto de aula, se plantearon los siguientes objetivos específicos.

Objetivos específicos:

1. Identificar las dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión de los conceptos de paralelismo y perpendicularidad, mediante la aplicación de una actividad diagnóstica.

El trabajo de grado plantea una actividad diagnostica para identificar las dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión de paralelismo y perpendicularidad. En esta actividad se plantean una serie de preguntas que indagan los conocimientos previos que tienen los estudiantes para abordar el objeto de estudio, de esta forma, el docente identifica en cuales conceptos debe profundizar para que los estudiantes logren avanzar en los niveles de comprensión de Pirie y Kieren.

2. Diseñar las actividades del proyecto de aula a partir de los procesos generales en matemáticas que permitan la comprensión del concepto de paralelismo y perpendicularidad en los estudiantes de grado 5.

Conclusiones

Las actividades planteadas en el proyecto de aula se construyeron teniendo en cuenta los procesos generales en matemáticas planteadas por el ministerio de educación en Colombia, estos procesos son: razonamiento, resolución y planteamiento de problemas, comunicación, modelación y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos (MEN, 1998). De estos 5 procesos generales se tienen en cuenta el razonamiento, este se aplica cuando mediante un juego relacionado con la estructura del Colegio hace que los estudiantes razonen en la construcción del concepto de ángulo, recta, y la relación entre dos rectas (paralelismo y perpendicularidad). La resolución y planteamiento de problemas se aplica cuando se propone una situación en la cual dos profesores del Colegio Paramelio y Perpendio se mueven de manera característica al interior de la Institución y estudiante debe solucionar la situación para que los docentes lleguen a algunos lugares de la Institución teniendo en cuenta la forma como se mueven. La comunicación se aplica haciéndole preguntas claras y concisas a los estudiantes para que ellos logren solucionar el problema planteado. Los demás procesos no se tuvieron en cuenta.

3. Intervenir mediante el proyecto de aula para verificar cuales son los procesos de razonamiento en la comprensión del concepto de paralelismo y perpendicularidad de los estudiantes de grado 5.

El proceso de intervención se realizó mediante la aplicación de una actividad llamada “Paramelio y Perpendio”, las preguntas están construidas a partir de unos descriptores planteados para cada nivel de comprensión de Pirie y Kieren. En la construcción de los descriptores se tiene en cuenta los conocimientos previos del estudiante y los conceptos matemáticos que necesita para comprender el objeto de estudio.

Conclusiones

4. Validar el impacto del proceso de comprensión en los estudiantes del concepto de paralelismo y perpendicularidad a partir del análisis de la clasificación de los ángulos y la relación entre dos o más rectas; ubicándolos en uno de los niveles de Piere y Kieren.

El análisis de los resultados se realiza teniendo en cuenta los descriptores planteados para cada uno de los niveles de comprensión, a continuación, se hace una descripción detallada de los niveles en los cuales fueron ubicados los casos C1, C2 y C3.

El caso 1 C1, logra avanzar al nivel 2 de comprensión *creación de imagen*, puesto que logra identificar algunos desplazamientos rectos y reconoce algunos giros en dichos desplazamientos, no logra avanzar a un nivel más avanzado porque sus respuestas en la actividad dejan ver algunas dificultades en la comprensión del objeto de estudio.

El caso 2 C2, logra avanzar al nivel 3 *comprensión de la imagen*, el estudiante identifica los desplazamientos rectos y los relaciona con una línea recta, también, relaciona los giros con los ángulos y da una clasificación de estos según sus ángulos.

El caso 3 C3, logra avanzar al nivel 4 *observación de la propiedad*, el estudiante logra identificar los ángulos rectos en los movimientos que realizan los personajes de la actividad, y los clasifica según su medida 90° . Identifica que las rectas pueden cruzarse en un punto o no cruzarse, de manera intuitiva define que una línea recta se compone de muchos (infinitos) puntos colineales. Identifica algunas propiedades de los ángulos y algunas relaciones entre dos o más rectas.

5.2 Proyectos hacia futuro

Este trabajo en profundización permite continuar con procesos de investigación en la comprensión de paralelismo y perpendicularidad, como:

Conclusiones

- Abordar la comprensión del concepto de paralelismo y perpendicularidad en objetos de tres dimensiones. Analizando los ángulos diedros y la relación de las aristas en los sólidos regulares e irregulares.
- El presente trabajo logra ubicar los estudiantes de grado 5 de primaria en uno de los niveles de comprensión planteados por Pirie y Kieren en la comprensión de paralelismo y perpendicularidad, queda abierta para una investigación en la cual se piense en una estrategia que logre hacer que los estudiantes avancen a un nivel superior en la comprensión de paralelismo y perpendicularidad.
- Proponer el proyecto de aula enmarcado en los niveles de comprensión de Pirie y Kieren en el estudio de otros conceptos matemáticos aplicados a estudiantes de grado 5.

5.3 Cronograma

Planificación de actividades

FASE	OBJETIVOS	ACTIVIDADES
Fase 1: Caracterización	Identificar las dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión de los conceptos de paralelismo y perpendicularidad, mediante la aplicación de una actividad diagnóstica.	<ol style="list-style-type: none"> 1. Diseño de la prueba diagnóstica. 2. Aplicación de la prueba diagnóstica. 3. Validación de los conocimientos previos de paralelismo y perpendicularidad.

Conclusiones

Fase 2: Diseño	Diseñar las actividades del proyecto de aula a partir de los procesos generales en matemáticas que permitan la comprensión del concepto de paralelismo y perpendicularidad en los estudiantes de grado 5.	<p>4. Teniendo en cuenta los procesos de razonamiento según los lineamientos, se diseñan las actividades del proyecto de aula.</p> <p>5. Diseño de las actividades correspondientes a los niveles de comprensión propuestos por Pirie y Kieren.</p> <p>6. Elaboración de los descriptores para cada uno de los niveles de comprensión propuestos por Pirie y Kieren.</p>
Fase 3: Intervención en el aula	Intervenir mediante el proyecto de aula para verificar cuales son los procesos de razonamiento en la comprensión del concepto de paralelismo y perpendicularidad de los estudiantes de grado 5.	<p>7. Confronto los resultados de la prueba diagnóstica, y mediante el análisis de estos se interviene con la secuencia de actividades del proyecto de aula.</p> <p>8. Aplico las actividades del proyecto de aula, donde se formaliza el concepto matemático.</p>

Conclusiones

Fase 4: Evaluación	<p>Validar el impacto del proceso de comprensión en los estudiantes del concepto de paralelismo y perpendicularidad a partir del análisis de las propiedades de los cuadriláteros;</p> <p>ubicándolos en uno de los niveles de Pirie y Kieren.</p>	<p>9. Construcción y aplicación de las actividades evaluativas a partir de los niveles de comprensión planteados por Pirie y Kieren.</p> <p>10. Ubico los estudiantes en uno de los niveles de comprensión, mediante un estudio de casos.</p>
---------------------------	--	---

Cronograma de actividades

Actividades	Semanas															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Actividad 1	x	x														
Actividad 2		x	x													
Actividad 3		x	x													
Actividad 4			x	x	x	x	x									
Actividad 5				x	x	x	x									
Actividad 6				x	x	x	x									
Actividad 7						x	x	x	x	x	x	x				

Conclusiones

Actividad 8						x	x	x	x	x	x	x				
Actividad 9												x	x	x	x	x
Actividad 10												x	x	x	x	x

Bibliografía

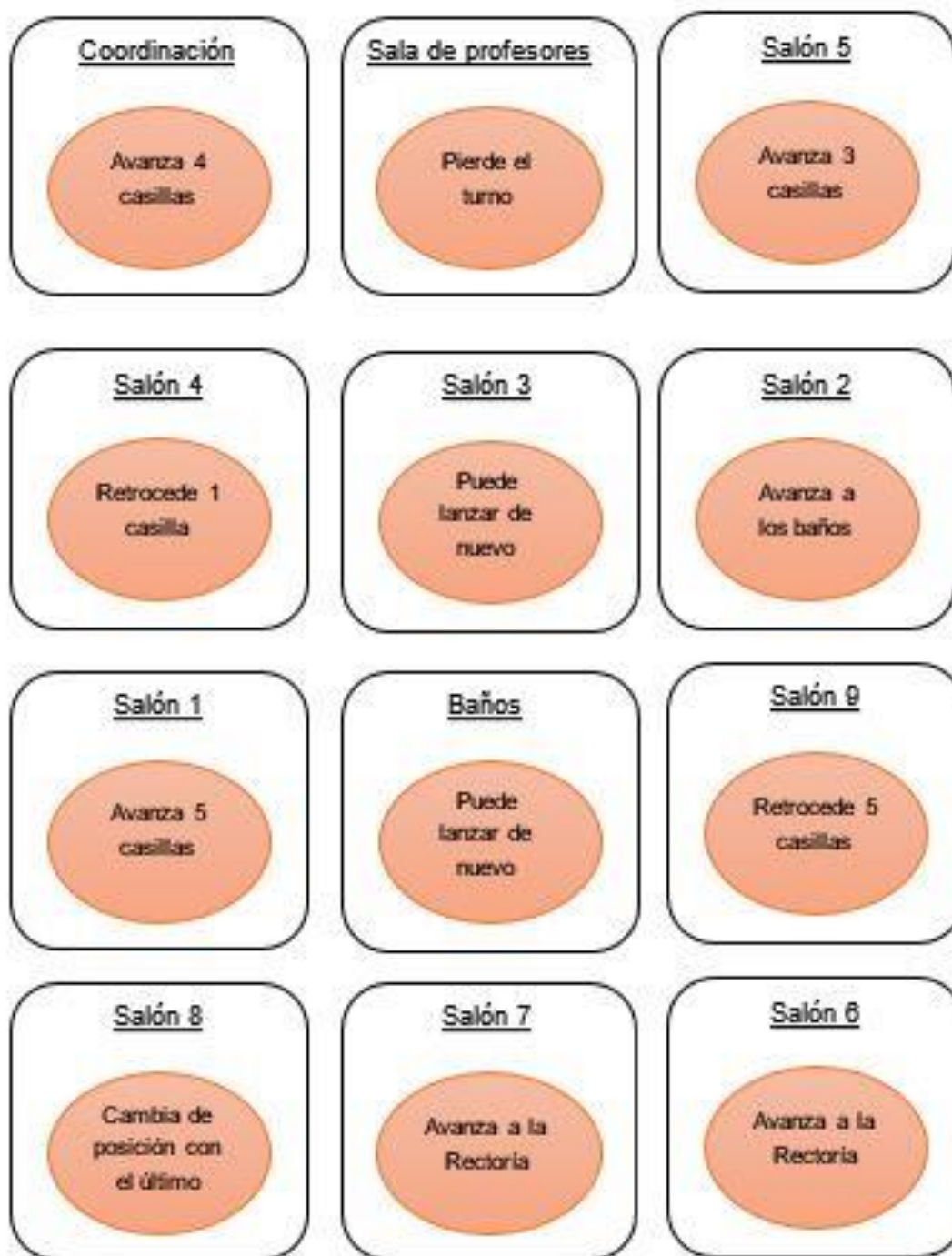
- Brown, J., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 32-42.
- Bunge, M. (1972). *La investigación científica, su estrategia y su filosofía*. . Barcelona: Ariel.
- Corrales Muñoz, L. M. (2015). *Diseño de un proyecto de aula que contribuya al fortalecimiento de la enseñanza de la matemática en la básica primaria*. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.
- Cotera Guerra, J. A. (2020). *OBJETIVACIÓN DEL CONCEPTO DE PERPENDICULARIDAD EN FIGURAS Y CUERPOS GEOMÉTRICOS POR ESTUDIANTES DE QUINTO GRADO*. Universidad de Antioquia, Medellín.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *LA GACETA DE RSME*, 9(1), 143-168.
- Edo Basté , M., Deulofeu Piquet, J., Badillo Jiménez, E., & Baeza Toro, M. (JUNIO de 2008). Estudio del paralelismo entre las fases de resolución de un juego y las fases de resolución de un problema. *UNION, REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA*(14), 61-75.
- Escobar Chaverra, B. (2019). *El proyecto de aula como movilizador de la interculturalidad en los estudiantes del grado cuarto de la IE San Benito*. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Glaserfeld, V. E. (1987). *Wissen, Sprache und Wirklichkeit. Arbeiten zum radikalen Konstruktivismus*. Braunschweig/Wiesbaden: Friedr: Vieweg & Sohn.

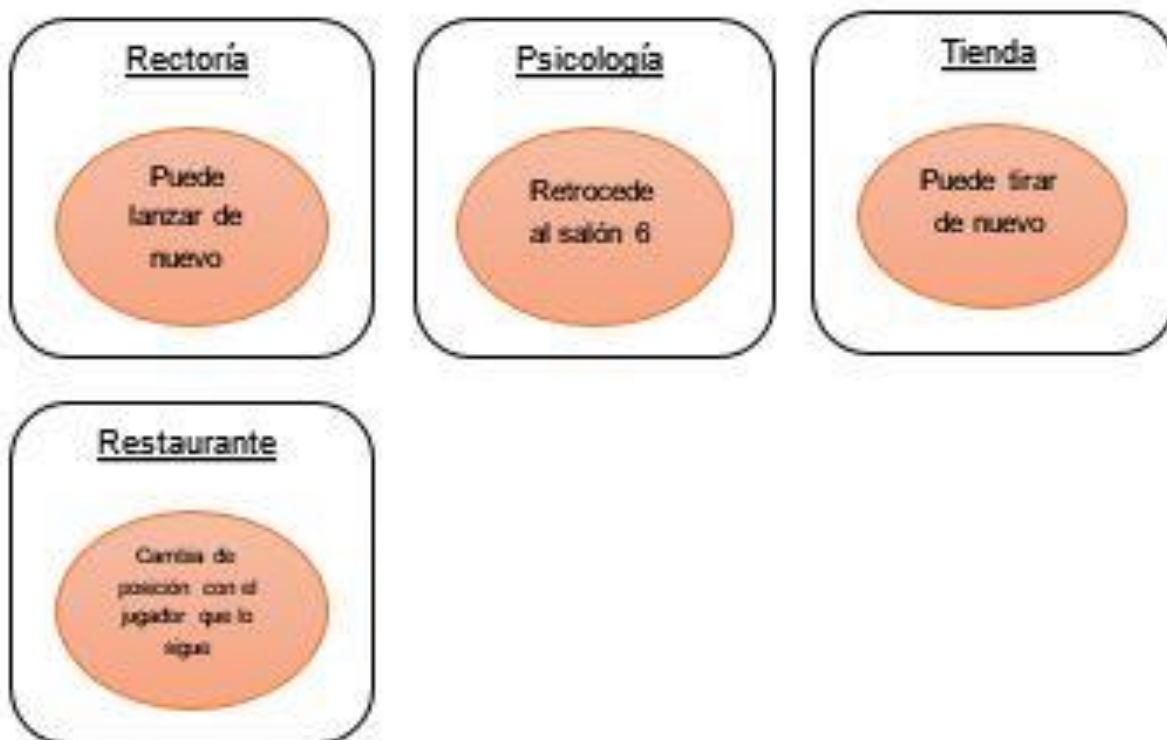
- González Agudelo, E. M. (2001). El proyecto de aula o acerca de la formación en investigación. *Universidad de Medellín*(73), 124-132.
- Londoño Cano, R. A. (2011). *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren*. Universidad de Antioquia.
- Lorenz, K. (1993). *La ciencia natural del hombre. El manuscrito de Rusia (1944- 1948)*. Barcelona: Tusquets.
- Meel, D. (2003). Models and theories of Mathematical Understanding: Comparing Pirie and Kieren's Model of the Growth of Mathematical Understanding and APOE theory. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 132-181.
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá.
- MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas: potenciar el pensamiento matematico: ¡un reto escolar!* Bogotá: Imprenta nacional de Colombia.
- Monsalve Orrego, L. Y. (2009). *LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN LA COMPRENSIÓN DE LAS RELACIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD*. Universidad de Antioquia.
- Obando Zapata, G., & Múnera Córdoba, J. (2003). Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. *Revista Educación y Pedagogía*, 15(35), 185-199.
- Piere, S., & Kieren, T. (1994b). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*. 165-190.
- Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. . *For the Learning of Mathematics*, 7-11.

- Pirie, S., & Kieren, T. (1991b).). folding back: Dynamics in the growth of mathematical understanding. Fifteenth Meeting of the Psychology of Mathematics Education Conference. Assisi, Italy.
- Pirie, S., & Kieren, T. (1992b). Watching Sandy's understanding grow. *journal of mathematical Behavior*.
- Restrepo Gómez, B. (2012). La investigación-acción educativa y la construcción de saber pedagógico. *Educación y educadores*, 7.
- Saxe, G. (1988). Studying working intelligence. *En B. Rogoff, & J. Lave, Everyday cognition* , 9-40.
- Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 151-169.

Anexos

Tarjetas del juego





Fotografías de los estudiantes realizando las actividades



